Übung 16 Fourier-Transformation Symmetrie

Lernziele

- wissen, dass die Fourier-Transformation Symmetrieeigenschaften besitzt.
- den Inhalt der in der Einleitung aufgeführten Symmetrieeigenschaften der Fourier-Transformation verstehen.

Einleitung

Die Fourier-Transformierte einer reellen Funktion x(t) besitzt unter anderen die folgenden Symmetrieeigenschaften:

(1) $X(-\omega) = \left(X(\omega)\right)^*$

(2) $|X(\omega)|$ gerade
(3) $\arg\left(X(\omega)\right)$ ungerade

(4) x(t) gerade X(ω) reell X(ω) gerade
(5) x(t) ungerade X(ω) rein imaginär X(ω) ungerade

Im Unterricht wurde die Symmetrieeigenschaft (1) bewiesen.

Aufgaben

1. Prüfen Sie die Symmetrieeigenschaften (1), (2) und (3) anhand der folgenden Funktion x(t) und ihrer Fourier-Transformierten X(ω) nach:

$$x(t) = e^{-at}\,\varepsilon(t) \quad (a>0) \quad \circ\!-\!\bullet \quad X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$$

2. Prüfen Sie die Symmetrieeigenschaft (4) am Beispiel der folgenden beiden geraden Funktionen x(t) nach:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \left(|t|<T_1\right) \\ 0 & \left(|t|>T_1\right) \end{cases} \qquad (T_1>0)$$

$$x(t) = e^{-a|t|} \qquad (a>0)$$

Die Fourier-Transformierten X(ω) der beiden Funktionen haben Sie bereits in der Übung 12, Aufgabe 1 bestimmt.

3. Zeigen Sie, dass die Symmetrieeigenschaften (2) und (3) aus der Symmetrieeigenschaft (1) folgen.

4. * Beweisen Sie die Symmetrieeigenschaft (4).

Vorgehen:
i) Zeigen Sie zuerst, dass $X(-\omega) = X(\omega)$ gilt, falls x(t) gerade ist.
Formen Sie dazu das Integral für $X(-\omega)$ durch eine Substitution in das Integral für $X(\omega)$ um.
ii) Zeigen Sie, dass aus $X(-\omega) = X(\omega)$ und der Symmetrieeigenschaft (1) die zu beweisende Symmetrieeigenschaft (4) folgt.

Lösungen

1. (1) $X(-\omega) = \left(X(\omega)\right)^* = \frac{1}{a-j\omega}$

   (2) $|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$ gerade

   (3) $\arg\left(X(\omega)\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$ ungerade

2. ...

3. a) ...
   b) ...
   c) ...

4. * ...