Übung 14 Fourier-Transformation Dirac'sche δ-"Funktion"

Lernziele

- eine einfachere Beziehung beweisen können.
- die Ausblendeigenschaft des Diracstosses verstehen.
- Integrale bestimmen können, in welchen die Dirac'sche δ-"Funktion" als Faktor des Integranden auftritt.
- die Fourier-Transformierte des Diracstosses auswendig kennen.

Aufgaben

1. Beweisen Sie die folgende Beziehung:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\,\delta(t) \quad (a \neq 0) \qquad \text{(Zeitdehnung des Diracstosses)}$$

Hinweis:

$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\,\delta(t)$ bedeutet:

- Die Ausdrücke auf den beiden Seiten des Gleichheitszeichens sind an der gleichen Stelle t unbestimmt und an allen übrigen Stellen t gleich Null.
- Die Integrale über die Ausdrücke auf den beiden Seiten des Gleichheitszeichens sind gleich gross, d.h. es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|}\,\delta(t)\,dt$$

2. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin(t)\cdot\delta(t)\,dt$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} 2\cdot\sin(2t)\cdot\delta\left(t-\frac{\pi}{4}\right)dt$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-t}\cdot\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)dt$

d) $\displaystyle\int_{-1}^{3} e^{-t}\cdot\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)dt$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\,d\tau$

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta(at-b)\,dt \qquad (a \neq 0)$

3. a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte des Diracstosses δ(t).

b) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte der Rechtecksfunktion $\delta_\Delta(t)$.

c) Für $\Delta \to 0$ strebt die Rechtecksfunktion $\delta_\Delta(t)$ gegen den Diracstoss δ(t).
Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte der Rechtecksfunktion $\delta_\Delta(t)$ für $\Delta \to 0$ gegen die Fourier-Transformierte des Diracstosses δ(t) strebt.

Lösungen

1. Substitution $\tau := at$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\,dt = \int_{\dots}^{\dots} \delta(\tau)\cdot \dots\,d\tau = \dots = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|}\,\delta(t)\,dt$$

2. a) 0
   b) 2
   c) 0
   d) $\frac{1}{\sqrt{e}}$
   e) $x(t)$
   f) $\frac{1}{|a|}\,x\left(\frac{b}{a}\right)$

3. a) $FT\left(\delta(t)\right) = 1$
   b) $FT\left(\delta_{\Delta}(t)\right) = \begin{cases} \frac{j}{\omega\Delta}\left(e^{-j\omega\Delta}-1\right) & (\omega \neq 0) \\ 1 & (\omega = 0) \end{cases}$
   c) ...
   (Regel von Bernoulli-de l'Hôpital)