

Übung 10 Komplexe Fourier-Reihe Komplexe Fourier-Koeffizienten, Reelle-Komplexe Fourier-Reihe

Lernziele

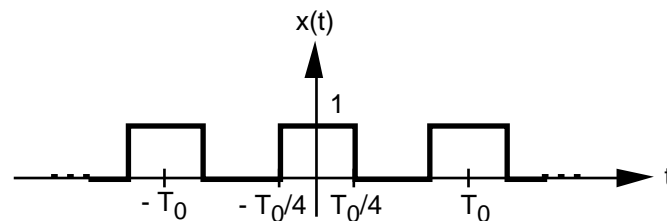
- einen neuen Sachverhalt analysieren können.
- die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion in die komplexe Fourier-Reihe umformen können und umgekehrt.
- die komplexen Fourier-Reihe einer Funktion, die aus einer Linearkombination trigonometrischer Funktionen besteht, direkt bestimmen können.
- das Spektrum einer periodischen Funktion als Balkendiagramm grafisch darstellen können.
- die Bedeutung der einzelnen Summanden der Fourier-Reihe verstehen.

Aufgaben

1. Gegeben ist die periodische Funktion $x(t)$ und ihre reellen Fourier-Koeffizienten a_0 , a_k ($k \in \mathbb{N}$) und b_k ($k \in \mathbb{N}$).

- i) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) aus den reellen Fourier-Koeffizienten a_0 , a_k ($k \in \mathbb{N}$) und b_k ($k \in \mathbb{N}$).
- ii) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) direkt aus der Funktion $x(t)$.
- iii) Schreiben Sie ein paar Glieder der komplexen Fourier-Reihe auf.

a) $x(t)$ aus Übung 5, Aufgabe 2:

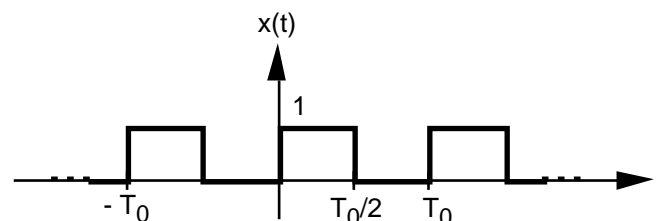


$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \begin{cases} \frac{2}{k} & (k = 1, 5, 9, \dots) \\ -\frac{2}{k} & (k = 3, 7, 11, \dots) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

$$b_k = 0$$

b)

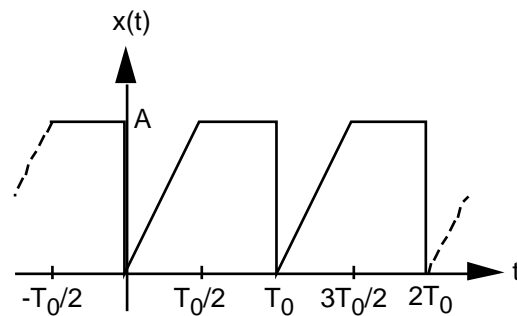


$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \begin{cases} \frac{2}{k} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

- c) $x(t)$ aus Übung 5, Aufgabe 3:



$$a_0 = \frac{3A}{4}$$

$$a_k = \begin{cases} -\frac{2A}{k^2} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

$$b_k = -\frac{A}{k}$$

2. Zeigen Sie, dass die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) einer periodischen, **reellen** Funktion $x(t)$ die folgenden Symmetrie-Eigenschaften besitzen:

- a) $x(t)$ gerade $c_k \in \mathbb{R}$
 b) $x(t)$ ungerade c_k rein imaginär
 c) * $(|c_k| \text{ gerade in } k)$ $(\arg(c_k) \text{ ungerade in } k)$

Hinweise:

- Gehen Sie bei a) und b) von der Definition der komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) aus (siehe Theorie-Blätter "Komplexe Fourier-Reihe").
Berücksichtigen Sie die Eigenschaften der reellen Fourier-Koeffizienten a_0 , a_k ($k \in \mathbb{N}$) und b_k ($k \in \mathbb{N}$) einer geraden bzw. ungeraden Funktion.
- Benützen Sie bei c) die im Unterricht hergeleitete Symmetrie-Eigenschaft $c_{-k} = (c_k)^*$

3. Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe der nachstehenden Funktionen $x(t)$. Lösen Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

- Bestimmen Sie T_0 und ω_0 .
- Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$).
- Stellen Sie das Spektrum $\{c_k\}$ der Funktion $x(t)$ grafisch als Balkendiagramm dar.

- a) $x(t) = \cos(4t) + \sin(8t)$
 b) $x(t) = \cos(4t) + \sin(6t)$
 c) $x(t) = \cos(4t) + \sin(t)$
 d) $x(t) = \cos\left(\frac{1}{4}(t-1)\right)$

4. (siehe Seite 3)

4. Eine periodische Funktion $x(t)$ mit der Grundperiode T_0 und der Grundfrequenz $\omega_0 := 2\pi/T_0$ kann in eine reelle Fourier-Reihe (Sinus-/Cosinus- oder Betrags-/Phasen-Darstellung) oder in eine komplexe Fourier-Reihe entwickelt werden:

Reelle Fourier-Reihe in der Sinus-/Cosinus-Darstellung:

$$(1) \quad x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \omega_0 t)) \quad (a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R})$$

Reelle Fourier-Reihe in der Betrags-/Phasen-Darstellung:

$$(2) \quad x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k \omega_0 t + \varphi_k) \quad (a_0 \in \mathbb{R}, A_k \geq 0, \varphi_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N})$$

Komplexe Fourier-Reihe:

$$(3) \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk \omega_0 t} \quad (c_k \in \mathbb{C})$$

- a) Erstellen Sie eine Formelsammlung, die es Ihnen erlaubt, die drei Formen (1) bis (3) der Fourier-Reihe ineinander überzuführen. Dazu sind die folgenden Zusammenhänge zwischen den entsprechenden Fourier-Koeffizienten zu finden:

(1) (2) :	$a_0, a_k (k \in \mathbb{N}), b_k (k \in \mathbb{N})$ $a_0, A_k (k \in \mathbb{N}), \varphi_k (k \in \mathbb{N})$	$a_0, A_k (k \in \mathbb{N}), \varphi_k (k \in \mathbb{N})$ $a_0, a_k (k \in \mathbb{N}), b_k (k \in \mathbb{N})$
(1) (3) :	$a_0, a_k (k \in \mathbb{N}), b_k (k \in \mathbb{N})$ $c_k (k \in \mathbb{Z})$	$c_k (k \in \mathbb{Z})$ $a_0, a_k (k \in \mathbb{N}), b_k (k \in \mathbb{N})$
(2) (3) :	$a_0, A_k (k \in \mathbb{N}), \varphi_k (k \in \mathbb{N})$ $c_k (k \in \mathbb{Z})$	$c_k (k \in \mathbb{Z})$ $a_0, A_k (k \in \mathbb{N}), \varphi_k (k \in \mathbb{N})$

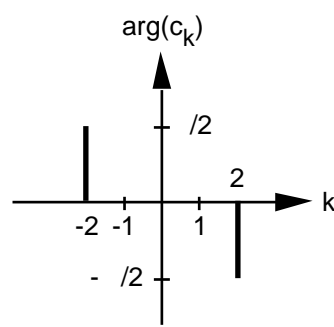
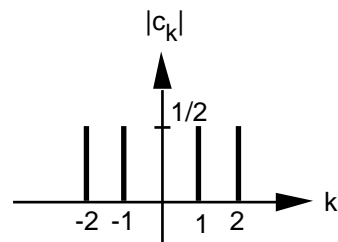
Hinweise:

- Den Zusammenhang (1) (2) können Sie den Theorie-Blättern "Reelle Fourier-Reihe" (Seite 4) entnehmen.
 - Der Zusammenhang (1) (3) folgt aus der Definition der komplexen Fourier-Koeffizienten $c_k (k \in \mathbb{Z})$.
 - Der Zusammenhang (2) (3) ergibt sich aus den Zusammenhängen (1) (2) und (2) (3).
- b) Vergleichen Sie die drei Formen (1), (2), (3) der Fourier-Reihe wie folgt:
 Geben Sie an, welche Summanden sich in den Fourier-Reihen entsprechen, d.h. welche Summanden jeweils
- den konstanten Anteil
 - die Grundschwingung bzw. die 1. Harmonische
 - die 2. Harmonische
 - die 3. Harmonische
 - die 7. Harmonische
 - die n. Harmonische
- in der Fourier-Analyse der Funktion $x(t)$ beschreiben.

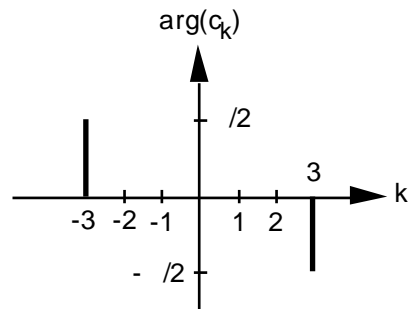
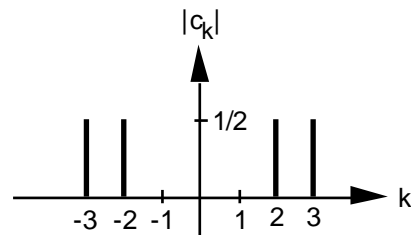
Lösungen

1. a) i) $c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k=0) \\ \frac{1}{k} & (k = \dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, \dots) \\ -\frac{1}{k} & (k = \dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, \dots) \\ 0 & (k \text{ gerade } k \neq 0) \end{cases}$
- ii) siehe i)
- iii) $x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{j\omega t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega t} - \frac{1}{3} e^{j3\omega t} - \frac{1}{3} e^{-j3\omega t} + \frac{1}{5} e^{j5\omega t} + \frac{1}{5} e^{-j5\omega t} + \dots$
- b) i) $c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k=0) \\ -j \frac{1}{k} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade } k \neq 0) \end{cases}$
- ii) siehe i)
- iii) $x(t) = \frac{1}{2} - j \frac{1}{2} e^{j\omega t} + j \frac{1}{2} e^{-j\omega t} - j \frac{1}{3} e^{j3\omega t} + j \frac{1}{3} e^{-j3\omega t} - j \frac{1}{5} e^{j5\omega t} + j \frac{1}{5} e^{-j5\omega t} - \dots$
- c) $c_k = \begin{cases} \frac{3A}{4} & (k=0) \\ -\frac{A}{k^2} \frac{1}{2} + j \frac{A}{2k} & (k \text{ ungerade}) \\ j \frac{A}{2k} & (k \text{ gerade } k \neq 0) \end{cases}$
- ii) siehe i)
- iii) $x(t) = \frac{3A}{4} + \left(-\frac{A}{2} + j \frac{A}{2}\right) e^{j\omega t} + \left(-\frac{A}{2} - j \frac{A}{2}\right) e^{-j\omega t} + j \frac{A}{4} e^{j2\omega t} - j \frac{A}{4} e^{-j2\omega t} + \left(-\frac{A}{9} \frac{1}{2} + j \frac{A}{6}\right) e^{j3\omega t} + \left(-\frac{A}{9} \frac{1}{2} - j \frac{A}{6}\right) e^{-j3\omega t} + j \frac{A}{8} e^{j4\omega t} - j \frac{A}{8} e^{-j4\omega t} + \dots$
2. $c_k = \begin{cases} a_0 & (k=0) \\ \frac{1}{2} (a_k - j b_k) & (k > 0) \\ \frac{1}{2} (a_{-k} + j b_{-k}) & (k < 0) \end{cases}$
- a) x(t) gerade $b_k = 0 \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $c_k = \begin{cases} a_0 & (k=0) \\ \frac{1}{2} a_k & (k > 0) \\ \frac{1}{2} a_{-k} & (k < 0) \end{cases} \quad \text{R}$
- b) x(t) ungerade $a_0 = 0 \quad a_k = 0 \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $c_k = \begin{cases} 0 & (k=0) \\ -j \frac{1}{2} b_k & (k > 0) \\ j \frac{1}{2} b_{-k} & (k < 0) \end{cases} \quad \text{rein imaginär}$
- c) * ...

3. a) $T_0 = \frac{1}{2}$, $\omega_0 = 4$ $c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{j}{2}$, $c_{-2} = (c_2)^* = \frac{j}{2}$, $c_k = 0$ ($k \neq \pm 1, \pm 2$)

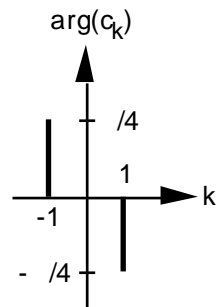
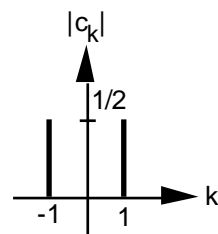


- b) $T_0 = \frac{1}{3}$, $\omega_0 = 2$ $c_2 = c_{-2} = \frac{1}{2}$, $c_3 = -\frac{j}{2}$, $c_{-3} = (c_3)^* = \frac{j}{2}$, $c_k = 0$ ($k \neq \pm 2, \pm 3$)



- c) $x(t)$ ist nicht periodisch und besitzt daher keine Fourier-Reihe.

- d) $T_0 = 8$, $\omega_0 = \frac{1}{4}$
 $c_1 = \frac{1}{2} e^{-j/4}$, $c_{-1} = (c_1)^* = \frac{1}{2} e^{j/4}$, $c_k = 0$ ($k \neq \pm 1$)



4. (siehe Seite 6)

4. a) (1) (2) : $a_0, a_k(k \in \mathbb{N}), b_k(k \in \mathbb{N}) \rightarrow a_0, A_k(k \in \mathbb{N}), \varphi_k(k \in \mathbb{N})$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\varphi_k = -\arctan \frac{b_k}{a_k} \quad (a_k > 0)$$

$$\varphi_k = -\frac{\pi}{2} \quad (a_k = 0, b_k > 0)$$

$$\varphi_k = \frac{\pi}{2} \quad (a_k = 0, b_k < 0)$$

$$\varphi_k = -\arctan \frac{b_k}{a_k} + \pi \quad (a_k < 0)$$

$a_0, A_k(k \in \mathbb{N}), \varphi_k(k \in \mathbb{N}) \rightarrow a_0, a_k(k \in \mathbb{N}), b_k(k \in \mathbb{N})$

$$a_k = A_k \cos(\varphi_k)$$

$$b_k = -A_k \sin(\varphi_k)$$

(1) (3) : $a_0, a_k(k \in \mathbb{N}), b_k(k \in \mathbb{N}) \rightarrow c_k(k \in \mathbb{Z})$

$$c_0 = a_0 \quad (k=0)$$

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \quad (k > 0)$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_{-k} + jb_{-k}) \quad (k < 0)$$

$c_k(k \in \mathbb{Z}) \rightarrow a_0, a_k(k \in \mathbb{N}), b_k(k \in \mathbb{N})$

$$a_0 = c_0$$

$$a_k = c_k + c_{-k}$$

$$b_k = j(c_k - c_{-k})$$

(2) (3) : $a_0, A_k(k \in \mathbb{N}), \varphi_k(k \in \mathbb{N}) \rightarrow c_k(k \in \mathbb{Z})$

$$c_0 = a_0 \quad (k=0)$$

$$c_k = \frac{1}{2}A_k e^{j\varphi_k} \quad (k > 0)$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2}A_k e^{-j\varphi_k} \quad (k < 0)$$

$c_k(k \in \mathbb{Z}) \rightarrow a_0, A_k(k \in \mathbb{N}), \varphi_k(k \in \mathbb{N})$

$$a_0 = c_0$$

$$A_k = 2|c_k|$$

$$\varphi_k = \arg(c_k)$$

b)

	(1)	(2)	(3)
konstanter Anteil	a_0	a_0	c_0
Grundschwingung	$a_1 \cdot \cos(\omega t) + b_1 \cdot \sin(\omega t)$	$A_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)$	$c_1 \cdot e^{j\omega t} + c_{-1} \cdot e^{-j\omega t}$
2. Harmonische	$a_2 \cdot \cos(2\omega t) + b_2 \cdot \sin(2\omega t)$	$A_2 \cdot \cos(2\omega t + \varphi_2)$	$c_2 \cdot e^{j2\omega t} + c_{-2} \cdot e^{-j2\omega t}$
3. Harmonische	$a_3 \cdot \cos(3\omega t) + b_3 \cdot \sin(3\omega t)$	$A_3 \cdot \cos(3\omega t + \varphi_3)$	$c_3 \cdot e^{j3\omega t} + c_{-3} \cdot e^{-j3\omega t}$
7. Harmonische	$a_7 \cdot \cos(7\omega t) + b_7 \cdot \sin(7\omega t)$	$A_7 \cdot \cos(7\omega t + \varphi_7)$	$c_7 \cdot e^{j7\omega t} + c_{-7} \cdot e^{-j7\omega t}$
n. Harmonische	$a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t)$	$A_n \cdot \cos(n\omega t + \varphi_n)$	$c_n \cdot e^{jn\omega t} + c_{-n} \cdot e^{-jn\omega t}$