

## Übung 9 Reelle Fourier-Reihe Betrags-/Phasen-Darstellung

### Lernziele

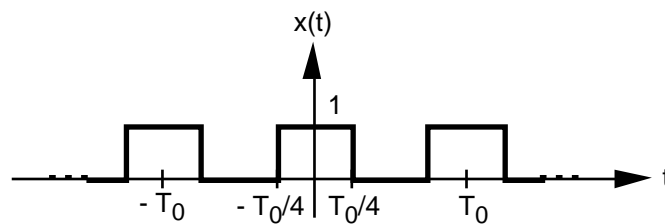
- die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion von der Sinus-/Cosinus-Darstellung in die Betrags-/Phasen-Darstellung umformen können.
- einen neuen Sachverhalt analysieren können.
- verstehen, inwiefern sich bei einer zeitlichen Verschiebung einer periodischen Funktion deren reelle Fourier-Koeffizienten in der Betrags-/Phasen-Darstellung verändern.

### Aufgaben

1. Gegeben ist die periodische Funktion  $x(t)$  und ihre reellen Fourier-Koeffizienten  $a_0$ ,  $a_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) und  $b_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).

- i) Bestimmen Sie die Koeffizienten  $A_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) und  $\varphi_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) mit Hilfe der im Unterricht hergeleiteten Beziehungen.
- ii) Schreiben Sie die ersten paar Glieder der reellen Fourier-Reihe sowohl in der Sinus-/Cosinus- als auch in der Betrags-/Phasen-Darstellung auf.

a)  $x(t)$  aus Übung 5, Aufgabe 2:

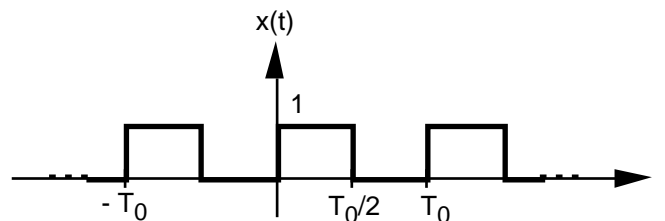


$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \begin{cases} \frac{2}{k} & (k = 1, 5, 9, \dots) \\ -\frac{2}{k} & (k = 3, 7, 11, \dots) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases} = \frac{(-1)^{(k-1)/2} 2}{k} \quad \begin{matrix} (k \text{ ungerade}) \\ (k \text{ gerade}) \end{matrix}$$

$$b_k = 0$$

b)

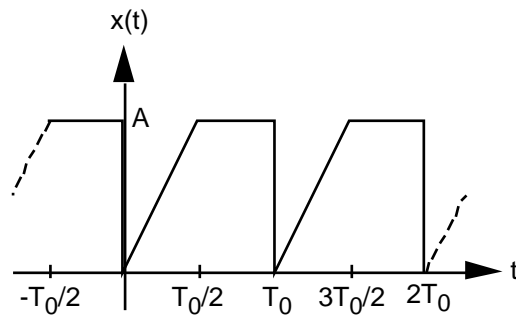


$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \begin{cases} \frac{2}{k} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

c)  $x(t)$  aus Übung 5, Aufgabe 3:

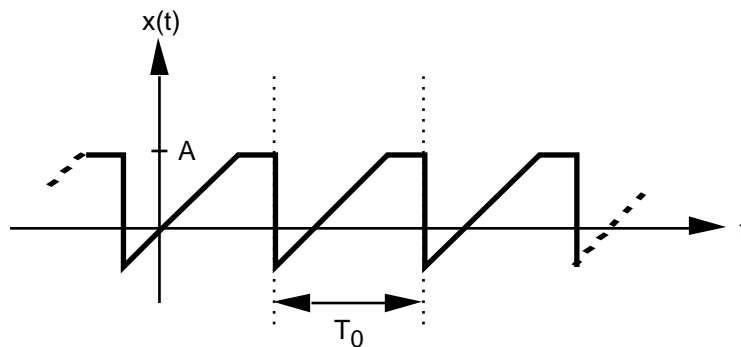


$$a_0 = \frac{3A}{4}$$

$$a_k = \begin{cases} -\frac{2A}{k^2 \cdot 2} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

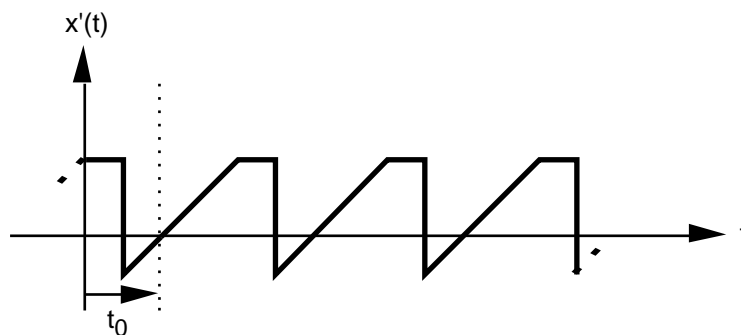
$$b_k = -\frac{A}{k}$$

2. Gegeben ist eine beliebige periodische Funktion  $x(t)$ :



Die Fourier-Koeffizienten  $a_0$ ,  $A_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) und  $b_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) seien bekannt.

Nun wird  $x(t)$  zeitlich um  $t_0$  verschoben, und man erhält die verschobene Funktion  $x'(t) = x(t-t_0)$ :



- Beurteilen Sie, inwiefern sich die Fourier-Koeffizienten  $a'_0$ ,  $A'_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) und  $b'_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) der verschobenen Funktion  $x'(t)$  gegenüber den Koeffizienten  $a_0$ ,  $A_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) und  $b_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) der ursprünglichen Funktion  $x(t)$  verändert haben.
- Prüfen Sie die Ergebnisse aus a) am Beispiel der beiden zueinander zeitlich verschobenen Rechteckfunktionen aus der Aufgabe 1 a) und b) nach.

**Lösungen**

1. a) i) 
$$A_k = \begin{cases} \frac{2}{k} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

$$k = \begin{cases} 0 & (k = 1, 5, 9, \dots) \\ \text{unbestimmt} & (k = 3, 7, 11, \dots) \\ \text{unbestimmt} & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

ii) Sinus-/Cosinus-Darstellung:  

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cos(\omega_0 t) - \frac{2}{5} \cos(3\omega_0 t) + \frac{2}{7} \cos(5\omega_0 t) - \frac{2}{9} \cos(7\omega_0 t) + \dots$$

Betrags-/Phasen-Darstellung:  

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cos(\omega_0 t) + \frac{2}{5} \cos(3\omega_0 t) + \frac{2}{7} \cos(5\omega_0 t) + \frac{2}{9} \cos(7\omega_0 t) + \dots$$

b) i) 
$$A_k = \begin{cases} \frac{2}{k} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

$$k = \begin{cases} -\frac{2}{k} & (k \text{ ungerade}) \\ \text{unbestimmt} & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

ii) Sinus-/Cosinus-Darstellung:  

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin(\omega_0 t) + \frac{2}{5} \sin(3\omega_0 t) + \frac{2}{7} \sin(5\omega_0 t) + \frac{2}{9} \sin(7\omega_0 t) + \dots$$

Betrags-/Phasen-Darstellung:  

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{5} \cos\left(3\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{7} \cos\left(5\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \dots$$

c) i) 
$$A_k = \begin{cases} \frac{A}{k^2} \sqrt{4+k^2} & (k \text{ ungerade}) \\ \frac{A}{k} & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

$$k = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{k}{2}\right) & (k \text{ ungerade}) \\ \frac{\pi}{2} & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

ii) Sinus-/Cosinus-Darstellung:  

$$x(t) = \frac{3A}{4} - \frac{2A}{9} \cos(\omega_0 t) - \frac{2A}{25} \cos(3\omega_0 t) - \frac{2A}{49} \cos(5\omega_0 t) - \dots$$

$$- \frac{A}{2} \sin(\omega_0 t) - \frac{A}{3} \sin(2\omega_0 t) - \frac{A}{4} \sin(3\omega_0 t) - \dots$$

Betrags-/Phasen-Darstellung:  

$$x(t) = \frac{3A}{4} + \frac{A}{2} \sqrt{4+\omega_0^2} \cos\left(\omega_0 t - \arctan\left(\frac{\omega_0}{2}\right)\right) + \frac{A}{4} \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ \frac{A}{9} \sqrt{4+9\omega_0^2} \cos\left(3\omega_0 t - \arctan\left(\frac{3\omega_0}{2}\right)\right) + \frac{A}{16} \cos\left(4\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ \frac{A}{25} \sqrt{4+25\omega_0^2} \cos\left(5\omega_0 t - \arctan\left(\frac{5\omega_0}{2}\right)\right) + \frac{A}{36} \cos\left(6\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) + \dots$$

2. a) 
$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1} A_k \cdot \cos(k \omega t + \varphi_k)$$

$$x'(t) = x(t-t_0) = a_0 + \sum_{k=1} A_k \cdot \cos(k \omega(t-t_0) + \varphi_k)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1} A_k \cdot \cos(k \omega t + (\varphi_k - k \omega t_0)) \stackrel{!}{=} a_0' + \sum_{k=1} A_k' \cdot \cos(k \omega t + \varphi_k')$$

$$a_0' = a_0$$

$$A_k' = A_k$$

$$\varphi_k' = \varphi_k - k \omega t_0$$

Eine zeitliche Verschiebung ändert in den einzelnen Fourier-Komponenten nur die Phasen, die Amplituden bleiben gleich.

b) ...