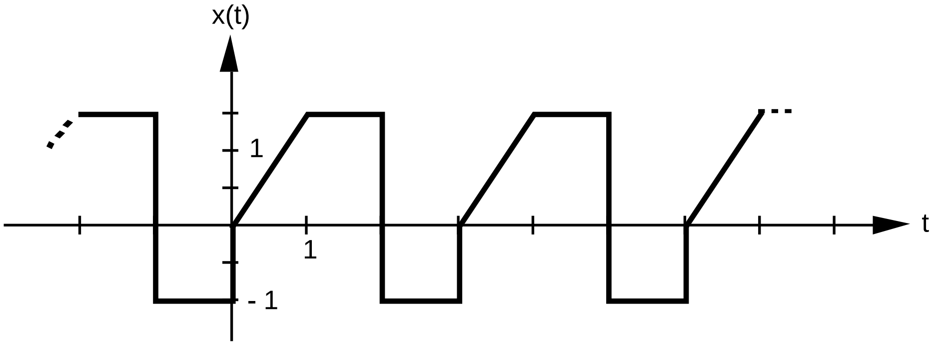
# Übung 8 Reelle Fourier-Reihe
## Aussagen über die reellen Fourier-Koeffizienten

### Lernziele

- aus dem Grafen einer einfacheren periodischen Funktion den konstanten Anteil der reellen Fourier-Reihe herauslesen können.
- angeben können, wie sich der konstante Anteil der reellen Fourier-Reihe einer periodischen Funktion ändert, wenn der Graf der Funktion vertikal verschoben wird.
- ohne Berechnung von Integralen Aussagen über die reellen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion mit speziellen Symmetrieeigenschaften machen können.
- ohne Berechnung von Integralen die reellen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion bestimmen können, die sich aus trigonometrischen Teilfunktionen zusammensetzt.
- beurteilen können, wie sich die reellen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion verändern, wenn man die Funktion skaliert.

### Aufgaben

1. Gegeben ist die periodische Funktion x(t):



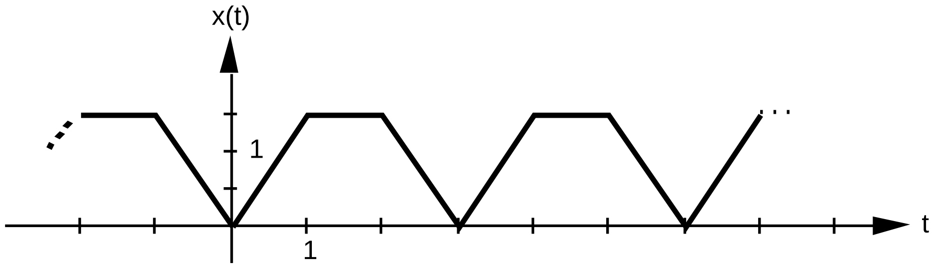

a) Bestimmen Sie den reellen Fourier-Koeffizienten $a_0$.

b) Der Graf von x(t) werde um 3 Einheiten vertikal nach oben verschoben.
Wie gross ist der Koeffizient $a_0$ der geschobenen Funktion?

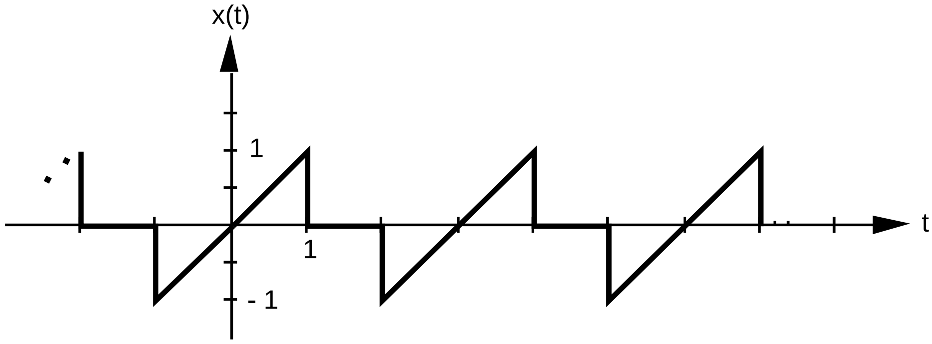
c) Um wieviele Einheiten müsste man den Grafen von x(t) vertikal verschieben, damit der Koeffizient $a_0$ der geschobenen Funktion gleich Null wird?

2. Beurteilen Sie, welche Angaben über die reellen Fourier-Koeffizienten $a_0$, $a_k$ (k  N), $b_k$ (k  N) der periodischen Funktion x(t) möglich sind, ohne dass man Berechungen ausführt.

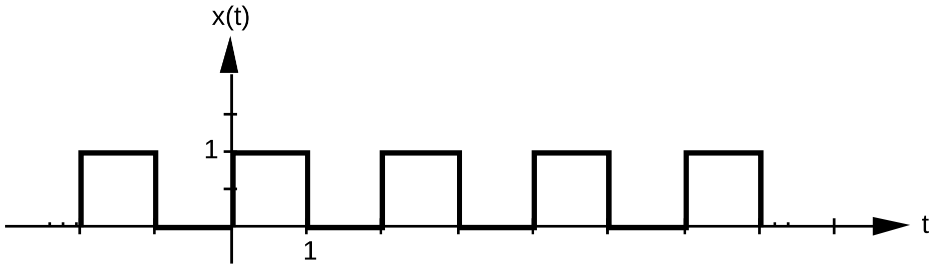
a)




b)




c)




3. Bestimmen Sie ohne Berechung von Integralen die reellen Fourier-Koeffizienten $a_0$, $a_k$ (k  N), $b_k$ (k  N) der Funktion x(t):

a) $x(t) = 2 + \cos(3t) - 4\cos(6t) + 2\sin(15t)$

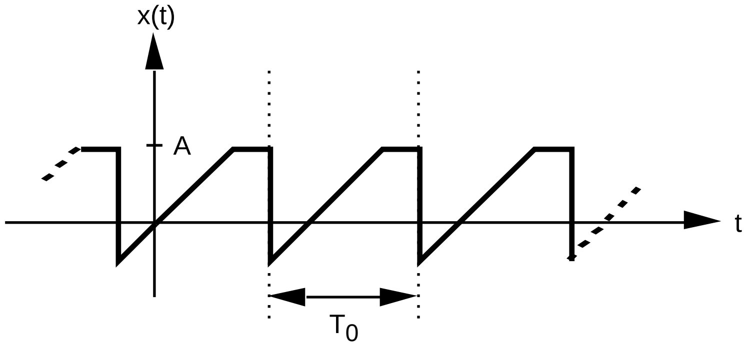
b) $x(t) = \sin(4t) + 3\cos(10t) - 2\sin(12t) + \sin(24t)$

c) $x(t) = -3 + 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 5\cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right) - 4\sin(\pi t)$

d) $x(t) = -3 + 2\sin\left(\frac{2}{3}t\right) + 5\cos\left(\frac{4}{3}t\right) - 4\sin(\pi t)$

4. (siehe Blatt 3)

4. Gegeben ist eine beliebige periodische Funktion x(t):



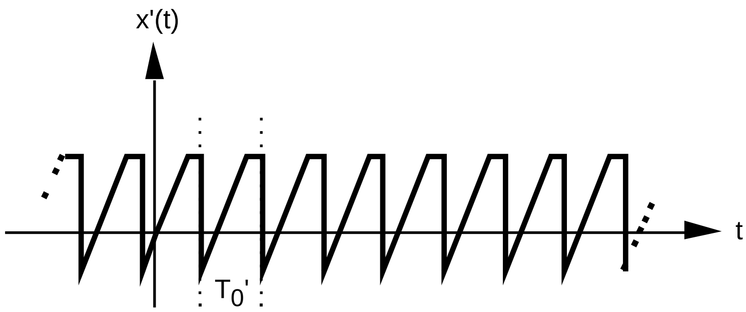

Die reellen Fourier-Koeffizienten $a_0$, $a_k$ (k   N), $b_k$ (k   N) von x(t) seien bekannt.

Beurteilen Sie, inwiefern sich die reellen Fourier-Koeffizienten $a_0'$, $a_k'$ (k   N), $b_k'$ (k   N) von x'(t) von den Koeffizienten $a_0$, $a_k$ (k   N), $b_k$ (k   N) von x(t) unterscheiden.

a)

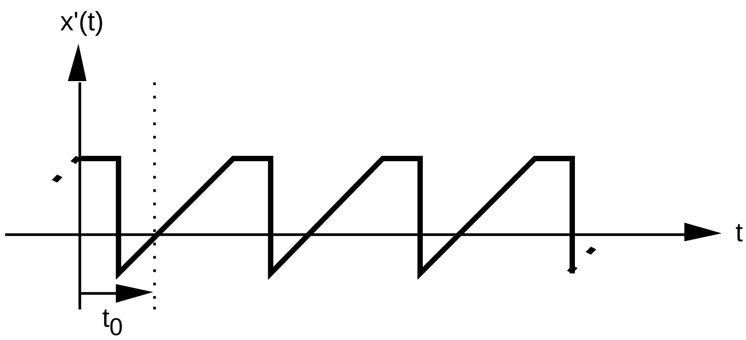

x'(t) ist gegenüber x(t) um den Faktor $r := \frac{A'}{A}$ skaliert, d.h. $x'(t) = r \cdot x(t)$

b)




x'(t) ist gegenüber x(t) zeitlich um den Faktor r skaliert bzw. "gestaucht", d.h. $T_0' = \frac{1}{r} T_0$

c) *




x'(t) ist gegenüber x(t) um $t_0$ zeitverschoben, d.h. $x'(t) = x(t-t_0)$

**Lösungen**

1. a) $\frac{5}{12}$

   b) $\frac{41}{12}$

   c) $-\frac{5}{12}$

2. a) $a_0 > 0$, $b_k = 0$ $(k\ \ N)$

   b) $a_0 = 0$, $a_k = 0$ $(k\ \ N)$

   c) $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_k = 0$ $(k\ \ N)$

3. a) $\omega_0 = 3$ $\quad x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k3t) + b_k \cdot \sin(k3t)\right)$

   $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = -4$, $b_5 = 2$, alle anderen Koeffizienten = 0

   b) $\omega_0 = 2$ $\quad x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k2t) + b_k \cdot \sin(k2t)\right)$

   $a_0 = 0$, $b_2 = 1$, $a_5 = 3$, $b_6 = -2$, $b_{12} = 1$, alle anderen Koeffizienten = 0

   c) $\omega_0 = \frac{\pi}{3}$ $\quad x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos\left(k \frac{\pi}{3} t\right) + b_k \cdot \sin\left(k \frac{\pi}{3} t\right)\right)$

   $a_0 = -3$, $b_2 = 2$, $b_3 = -4$, $a_4 = 5$, alle anderen Koeffizienten = 0

   d) x(t) ist nicht periodisch und besitzt daher keine reelle Fourier-Reihe.

4. a) Die Koeffizienten vergrössern sich um den Faktor r
   $a_0' = r \cdot a_0$, $a_k' = r \cdot a_k$ $(k\ \ N)$, $b_k' = r \cdot b_k$ $(k\ \ N)$

   b) Die Koeffizienten bleiben unverändert
   $a_0' = a_0$, $a_k' = a_k$ $(k\ \ N)$, $b_k' = b_k$ $(k\ \ N)$

   c) * $a_0' = a_0$

   **k-te Harmonische**

   $a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)$

   $\downarrow$

   $a_k \cdot \cos\left(k\omega_0(t-t_0)\right) + b_k \cdot \sin\left(k\omega_0(t-t_0)\right)$

   $= a_k\left(\cos(k\omega_0 t) \cdot \cos(k\omega_0 t_0) + \sin(k\omega_0 t) \cdot \sin(k\omega_0 t_0)\right)$

   $\quad + b_k\left(\sin(k\omega_0 t) \cdot \cos(k\omega_0 t_0) - \cos(k\omega_0 t) \cdot \sin(k\omega_0 t_0)\right)$

   $= \ldots$

   $= \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t_0) - b_k \cdot \sin(k\omega_0 t_0)\right) \cos(k\omega_0 t) + \left(a_k \cdot \sin(k\omega_0 t_0) + b_k \cdot \cos(k\omega_0 t_0)\right) \sin(k\omega_0 t)$

   Es folgt also:

   $a_k' = a_k \cdot \cos(k\omega_0 t_0) - b_k \cdot \sin(k\omega_0 t_0)$

   $b_k' = a_k \cdot \sin(k\omega_0 t_0) + b_k \cdot \cos(k\omega_0 t_0)$