Übung 7 Reelle Fourier-Reihe
a_0, Gerade/ungerade/konstante/trigonometrische Funktionen, Linearität

PUZZLE

Themen

1 **a_0**

2 **Gerade / ungerade Funktion**

3 **Konstante / trigonometrische Funktion**

4 * **Linearität**

Lernziele

1 **a_0**
- verstehen, dass der konstante Anteil in der reellen Fourier-Reihe einer periodischen Funktion der zeitliche Mittelwert der Funktion über eine Grundperiode ist.
- verstehen, dass sich in der reellen Fourier-Reihe einer periodischen Funktion nur der konstante Anteil ändert, wenn man die Funktion mit einer Konstanten addiert.

2 **Gerade / ungerade Funktion**
- verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer geraden periodischen Funktion eine reine Cosinus-Reihe ist.
- verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer ungeraden periodischen Funktion eine reine Sinus-Reihe ohne konstanten Anteil ist.

3 **Konstante / trigonometrische Funktion**
- verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer konstanten Funktion weder Cosinus- noch Sinus-Glieder enthält sondern lediglich einen konstanten Anteil.
- verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer reinen Cosinus-Funktion ein einziges Cosinus-Glied enthält.
- verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer reinen Sinus-Funktion ein einziges Sinus-Glied enthält.

4 * **Linearität**
- verstehen, dass die Operationen, welche einer periodischen Funktion deren reelle Fourier-Koeffzienten zuordnen, linear sind.

Aufgaben

1 **a_0**

Einzelstudium

Finden Sie schlüssige Erklärungen dafür, dass die beiden folgenden Aussagen über den konstanten Anteil a_0 der reellen Fourier-Reihe einer periodischen Funktion x(t) wahr sind:

> Die Konstante a_0 ist gleich dem zeitlichen Mittelwert der Funktion x(t) über eine Grundperiode T_0.
>
> Addiert man die Funktion x(t) mit einer Konstanten, so ändert sich in der reellen Fourier-Reihe nur der konstante Anteil a_0. Die Cosinus- und Sinus-Glieder bleiben unverändert.

Expertenrunde

Diskutieren Sie gemeinsam die Aufgabe, die Sie im Einzelstudium bearbeitet haben, und klären Sie in der Gruppe alle Unklarheiten ab.

Unterrichtsrunde

Unterrichten Sie Ihre Kollegen/-innen über Ihr Thema 1.
Lassen Sie sich von Ihren Kollegen/-innen über die Themen 2, 3, 4 unterrichten.

2 Gerade / ungerade Funktion

Einzelstudium

Betrachten Sie die folgenden beiden Aussagen über die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion x(t):

x(t) **gerade** ⇔ Die reelle Fourier-Reihe von x(t) enthält nur **Cosinus**-Glieder, d.h.

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega_0 t)$$

x(t) **ungerade** ⇔ Die reelle Fourier-Reihe von x(t) enthält nur **Sinus**-Glieder und keinen konstanten Anteil, d.h.

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)$$

a) Finden Sie schlüssige Erklärungen dafür, dass die beiden Aussagen wahr sind.
b) Finden Sie aus dem Unterricht oder aus Tabellen Beispiele von Funktionen x(t), an welchen Sie die Aussagen nachprüfen können.

Expertenrunde

Diskutieren Sie gemeinsam die Aufgabe, die Sie im Einzelstudium bearbeitet haben, und klären Sie in der Gruppe alle Unklarheiten ab.

Unterrichtsrunde

Unterrichten Sie Ihre Kollegen/-innen über Ihr Thema 2.
Lassen Sie sich von Ihren Kollegen/-innen über die Themen 1, 3, 4 unterrichten.

3 Konstante / trigonometrische Funktion

Einzelstudium

Finden Sie schlüssige Erklärungen dafür, dass die drei folgenden Aussagen über die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion x(t) wahr sind:

$x(t) = x_0 = \text{konst.}$ ⇔ Die reelle Fourier-Reihe von x(t) enthält weder Cosinus- noch Sinus-Glieder sondern lediglich einen konstanten Anteil, d.h.

$x(t) = a_0$ mit $a_0 = x_0$

$x(t) = A \cdot \cos(\omega t)$ ⇔ Die reelle Fourier-Reihe von x(t) enthält nur ein einziges Cosinus-Glied, d.h.

$x(t) = a_1 \cdot \cos(\omega_0 t)$ mit $a_1 = A$ und $\omega_0 = \omega$

$x(t) = A \cdot \sin(\omega t)$ ⇔ Die reelle Fourier-Reihe von x(t) enthält nur ein einziges Sinus-Glied, d.h.

$x(t) = b_1 \cdot \sin(\omega_0 t)$ mit $b_1 = A$ und $\omega_0 = \omega$

Expertenrunde

Diskutieren Sie gemeinsam die Aufgabe, die Sie im Einzelstudium bearbeitet haben, und klären Sie in der Gruppe alle Unklarheiten ab.

Unterrichtsrunde

Unterrichten Sie Ihre Kollegen/-innen über Ihr Thema 3.
Lassen Sie sich von Ihren Kollegen/-innen über die Themen 1, 2, 4 unterrichten.

4 * Linearität

Einzelstudium

In der Aufgabe 2 der Übung 3 haben Sie gezeigt, dass die Operation, die einer periodischen Funktion x(t) den Fourier-Koeffizienten a_0 zuordnet, linear ist:

$$a_0: \qquad x(t) \rightarrow a_0\big(x(t)\big) = \frac{1}{2\pi} \int_{(T_0)} x(t)\, dt$$

Finden Sie nun schlüssige Erklärungen dafür, dass auch diejenigen Operationen linear sind, welche der Funktion x(t) die Fourier-Koeffizienten a_k (k N) und b_k (k N) zuordnen:

$$a_k: \qquad x(t) \rightarrow a_k\big(x(t)\big) = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t)\cdot\cos(k\omega_0 t)\, dt$$

$$b_k: \qquad x(t) \rightarrow b_k\big(x(t)\big) = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t)\cdot\sin(k\omega_0 t)\, dt$$

Hinweis:
Bei der Beurteilung der Linearität betrachtet man eine Darstellung von x(t) als Linearkombination von zwei Teilfunktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$:

$$x(t) = \lambda_1 \cdot x_1(t) + \lambda_2 \cdot x_2(t)$$

i) Nehmen Sie an, dass $x_1(t)$ und $x_2(t)$ die gleiche Grundperiode besitzen.

ii) ** Worin liegt die Problematik, falls $x_1(t)$ und $x_2(t)$ unterschiedliche Grundperioden besitzen?

Expertenrunde

Diskutieren Sie gemeinsam die Aufgabe, die Sie im Einzelstudium bearbeitet haben, und klären Sie in der Gruppe alle Unklarheiten ab.

Unterrichtsrunde

Unterrichten Sie Ihre Kollegen/-innen über Ihr Thema 4.
Lassen Sie sich von Ihren Kollegen/-innen über die Themen 1, 2, 3 unterrichten.