

## Übung 5 Reelle Fourier-Reihe Bestimmung der reellen Fourier-Koeffizienten

### Lernziele

- einfachere theoretische Sachverhalte analysieren können.
- die reellen Fourier-Koeffizienten einer einfacheren periodischen Funktion von Hand und mit Hilfe von Integraltafeln bestimmen können.

### Aufgaben

1. Im Unterricht wurden die folgenden Formeln zur Berechnung der reellen Fourier-Koeffizienten  $a_0$ ,  $a_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ),  $b_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) einer periodischen Funktion  $x(t)$  hergeleitet:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cdot \cos(k \omega t) dt$$

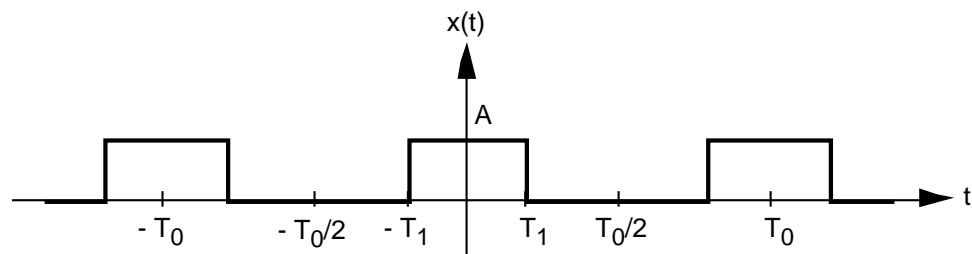
$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cdot \sin(k \omega t) dt$$

- a) Prüfen Sie nach, dass die Integranden in allen drei Integralen die Periode (nicht notwendigerweise **Grund**periode)  $T_0$  besitzen.
- b) Erklären Sie, dass man auf Grund der  $T_0$ -Periodizität der Integranden über ein **beliebiges** Intervall der Länge  $T_0$  integrieren kann:

$$\int_0^{T_0} \dots dt = \int_{(T_0)} \dots dt$$

2. Gegeben ist die folgende periodische Rechtecks-Funktion  $x(t)$  (Beispiel auf den Theorieblättern "Reelle Fourier-Reihe"):

$$x(t) = \begin{cases} A & (|t| < T_1) \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}, \quad x(t+T_0) = x(t)$$

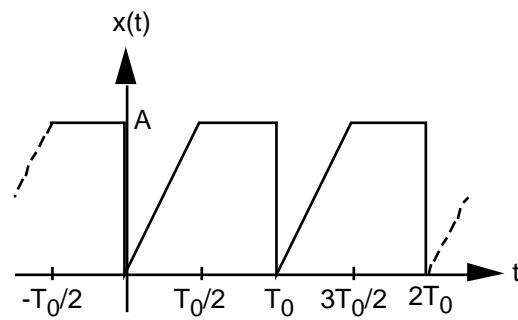


- a) Bestimmen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten  $a_0$ ,  $a_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ),  $b_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) von  $x(t)$  von Hand und mit Hilfe von Integraltafeln.

Betrachten Sie nun den Spezialfall  $A := 1$ ,  $T_1 := \frac{T_0}{4}$

- b) Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten, d.h. vereinfachen Sie die Resultate aus a).
- c) Schreiben Sie die ersten paar Glieder der reellen Fourier-Reihe auf.

3. Gegeben ist der Graf einer periodischen Funktion  $x(t)$ :



- Geben Sie  $x(t)$  analytisch an, d.h. die Funktionsgleichung  $x(t) = \dots$
- Bestimmen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten  $a_0$ ,  $a_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ),  $b_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) von  $x(t)$  von Hand und mit Hilfe von Integraltafeln.
- Schreiben Sie die ersten paar Glieder der reellen Fourier-Reihe auf.

**Lösungen**

1. a)  $x(t)$  hat Grundperiode  $T_0$   
 $\cos(k \cdot \omega_0 t)$  und  $\sin(k \cdot \omega_0 t)$  haben Grundperiode  $\frac{2\pi}{k \cdot \omega_0} = \frac{T_0}{k}$   
 $x(t)$ ,  $x(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t)$  und  $x(t) \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t)$  haben Periode  $T_0$
- b) ...
2. a)  $a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) dt = \dots = \frac{2AT_1}{T_0}$   
 $a_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t) dt = \dots = \frac{2A \cdot \sin(k \cdot \omega_0 T_1)}{k}$   
 $b_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t) dt = \dots = 0$
- b)  $a_0 = \frac{1}{2}$   
 $a_k = \begin{cases} \frac{2}{k} & (k=1,5,9,\dots) \\ -\frac{2}{k} & (k=3,7,11,\dots) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases} = \begin{cases} \frac{(-1)^{(k-1)/2} 2}{k} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$   
 $b_k = 0$
- c)  $x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cos(\omega_0 t) - \frac{2}{3} \cos(3 \omega_0 t) + \frac{2}{5} \cos(5 \omega_0 t) - \frac{2}{7} \cos(7 \omega_0 t) + \dots$
3. a)  $x(t) = \begin{cases} \frac{2A}{T_0} t & 0 \leq t < \frac{T_0}{2} \\ A & \frac{T_0}{2} \leq t < T_0 \end{cases}, \quad x(t+T_0) = x(t)$
- b)  $a_0 = \frac{3A}{4}$   
 $a_k = \begin{cases} -\frac{2A}{k^2} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$   
 $b_k = -\frac{A}{k}$
- c)  $x(t) = \frac{3A}{4} - \frac{2A}{2} \left( \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{9} \cos(3 \omega_0 t) + \frac{1}{25} \cos(5 \omega_0 t) + \dots \right) - \frac{A}{k} \left( \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \sin(2 \omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3 \omega_0 t) + \dots \right)$