Übung 3 — Operationen Linearität

Lernziel

- beurteilen können, ob eine Operation linear ist oder nicht.

Aufgaben

1. Beurteilen Sie, ob die folgenden Operationen linear sind oder nicht:

   a) $T_1 : \quad x(t) \to T_1\big(x(t)\big) = \int 2\cdot x(t)\, dt$

   b) $T_2 : \quad y(t) \to T_2\big(y(t)\big) = \int_0^1 \big(y(t)+1\big)\, dt$

   c) $y : \quad t \to y(t) = \int_0^t \cos(\tau)\, d\tau$

2. Im Zusammenhang mit den Fourier-Reihen und der Fourier-Transformation treten Abbildungen auf, die eine Menge von Funktionen auf eine andere Menge abbilden:

   $$T : \quad \text{Menge von Funktionen} \to \text{Menge von ...}$$
   $$x(t) \to T\big(x(t)\big) = \text{...}$$

   Zwei Beispiele solcher Abbildungen sind die folgenden:

   $$a_0 : \quad x(t) \to a_0\big(x(t)\big) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, dt$$

   $$FT : \quad x(t) \to FT\big(x(t)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

   $\Big($$FT\big(x(t)\big)$ hängt vom Wert der reellen Variablen ω ab.$\Big)$

   a) Beurteilen Sie für beide Abbildungen, aus was für Objekten (Zahlen, Funktionen, Vektoren, Matrizen, etc.) die "Output-Menge" besteht.

   b) Zeigen Sie, dass die beiden Abbildungen linear sind.

3. Beurteilen Sie, für welche Werte der reellen Parameter m, q, a, Δt die folgenden Operationen linear sind:

   a) $f : \quad x \to f(x) = mx + q \qquad (m\ \ R,\ q\ \ R)$

   b) * $T_3 : \quad x \to T_3(x) = \int_0^1 (x+at)\, dt \qquad (a\ \ R)$

   c) * $T_4 : \quad t \to T_4(t) = \int_t^{t+\Delta t} (x+a)\, dx \qquad (\Delta t>0,\ a\ \ R)$

Lösungen

1. a) linear
   b) nicht linear
   c) nicht linear

2. a) a_0 : Menge von Funktionen $\rightarrow$ Menge von **Zahlen**
   FT : Menge von Funktionen $\rightarrow$ Menge von **Funktionen**
   b) …

3. a) $q = 0$
   b) * $a = 0$
   c) * $\frac{\Delta t}{2} + a = 0$