

Parseval'sche Beziehung

$x(t)$ periodisch mit Grundperiode T_0 bzw. Grundfrequenz $\omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$

Komplexe Fourier-Reihe

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Parseval'sche Beziehung

$$\frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Beweis:

$$\frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot x^*(t) dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{jk\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} c_k^* \int_{(T_0)} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} c_k^* \int_{(T_0)} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* c_k$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Physikalische Interpretation:	$x(t)$:	"Signal" (elektr. Spannung, elektr. Stromstärke, ...)
	$ x(t) ^2$		Momentanleistung des Signals zum Zeitpunkt t (Proportionalitätskonstante hängt nur von Systemparametern ab, z.B. Widerstand R)
	$ x(t) ^2 dt$		Energie im Signal im Zeitintervall $[t, t+dt]$
	$\frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) ^2 dt$		Mittlere Leistung des Signals
	$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k ^2$		
	$ c_k ^2$		Mittlere Leistung der k -ten Fourier- Komponente des Signals