Komplexe Fourier-Reihe

Herleitung aus der reellen Fourier-Reihe

Reelle FR $\quad x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right)$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \frac{1}{2} \left(e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}\right) + b_k \cdot \frac{1}{2j} \left(e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}\right) \right)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \left(a_k + \frac{1}{j} b_k \right) e^{jk\omega_0 t} + \frac{1}{2} \left(a_k - \frac{1}{j} b_k \right) e^{-jk\omega_0 t} \right)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} (a_k - jb_k)\, e^{jk\omega_0 t} + \frac{1}{2} (a_k + jb_k)\, e^{-jk\omega_0 t} \right)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} (a_k - jb_k)\, e^{jk\omega_0 t} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} (a_k + jb_k)\, e^{-jk\omega_0 t} \right)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} (a_k - jb_k)\, e^{jk\omega_0 t} \right) + \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2} (a_{-k} + jb_{-k})\, e^{jk\omega_0 t} \right)$$

Def.: $\boxed{c_k := \begin{cases} a_0 & (k=0) \\ \frac{1}{2}(a_k - jb_k) & (k>0) \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + jb_{-k}) & (k<0) \end{cases}}$

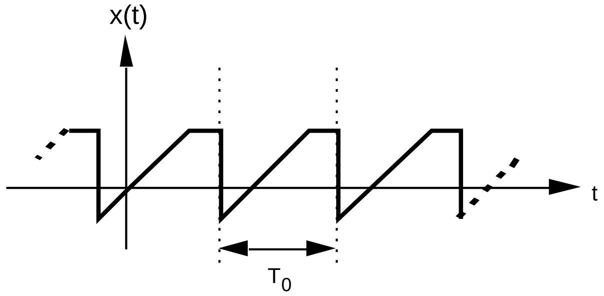
$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k\, e^{jk\omega_0 t}$$

$$= c_0\, e^{j0\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k\, e^{jk\omega_0 t}$$

Komplexe FR $\quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t}$

Definition

Periodische Funktion bzw. periodisches Signal x(t) mit Grundperiode T_0



Die Reihe in der Darstellung

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$$

ist die **komplexe Fourier-Reihe** von x(t).

Die Konstanten c_k (k Z) sind die **komplexen Fourier-Koeffizienten**.

$x(t) = c_0$	Konstanter Anteil
$+\ c_1 e^{j\omega_0 t} + c_{-1} e^{-j\omega_0 t}$	1. Harmonische, Grundschwingung
$+\ c_2 e^{j2\omega_0 t} + c_{-2} e^{-j2\omega_0 t}$	2. Harmonische, 1. Oberschwingung
$+\ c_3 e^{j3\omega_0 t} + c_{-3} e^{-j3\omega_0 t}$	3. Harmonische, 2. Oberschwingung
$+\ \dots$	
$+\ c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$	n. Harmonische, (n-1). Oberschwingung
$+\ \dots$	

Direkte Bestimmung der komplexen Fourier-Koeffizienten

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk\omega_0 t} \qquad \Big| \cdot e^{-jm\omega_0 t},\ m\ \ Z \qquad \Big| \int_0^{T_0} \dots \, dt$$

$$\int_0^{T_0} x(t) \cdot e^{-jm\omega_0 t} \, dt = \int_0^{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jm\omega_0 t} \, dt$$

$$= \dots$$

$$= c_m \cdot T_0 \qquad \Big| : T_0$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} \, dt$$

Da der Integrand die Periode T_0 besitzt, kann über ein beliebiges Intervall der Länge T_0 integriert werden:

$$\boxed{c_k = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} \, dt}$$