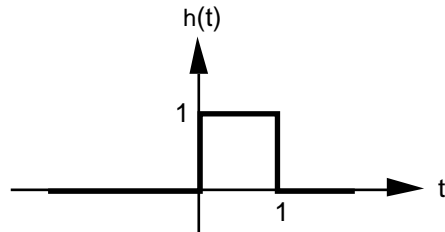


## Übung 45                      Repetition Fourier-Transformation, Laplace-Transformation

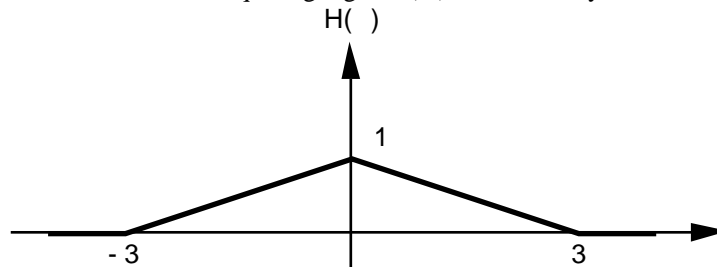
### Aufgaben

1. Gegeben ist der Graf der Einheitsimpuls-Übertragungsfunktion  $h(t)$  eines LTI-Systems:



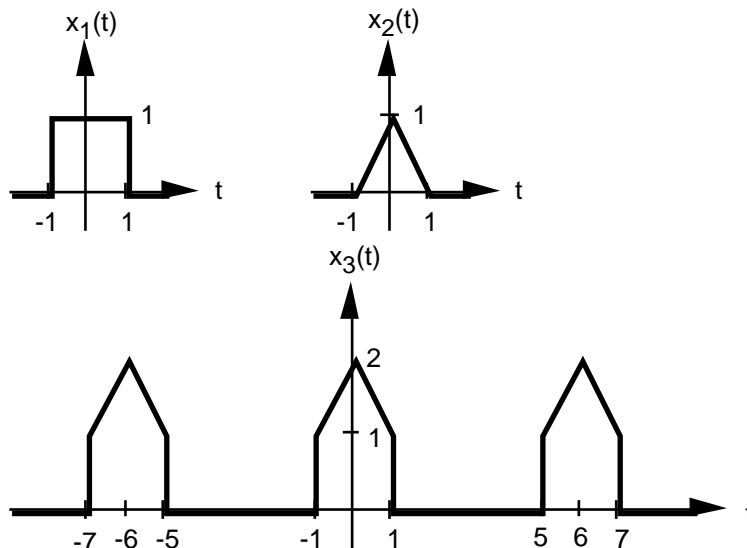
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung und den Grafen des zum Eingangssignal  $x(t) = \delta(t)$  gehörenden Ausgangssignals  $y(t)$ .  
Allfällige Integrale müssen ohne Taschenrechner berechnet werden.

2. Gegeben ist der Graf des Frequenzganges  $H(\omega)$  eines LTI-Systems:



Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des zum Eingangssignal  $x(t) = \sin(t) + \sin(2t) + \sin(3t) + \sin(4t)$  gehörenden Ausgangssignals  $y(t)$ .

3. Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktionen  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  sowie der periodischen Funktion  $x_3(t)$ :



Drücken Sie die Fourier-Transformierte  $X_3(\omega)$  der Funktion  $x_3(t)$  durch die als bekannt vorausgesetzten Fourier-Transformierten  $X_1(\omega)$  und  $X_2(\omega)$  aus.

Sie sollen also nicht den konkreten Ausdruck für  $X_3(\omega)$  berechnen, sondern den Zusammenhang zwischen  $X_3(\omega)$  und den beiden bekannten Transformierten  $X_1(\omega)$ ,  $X_2(\omega)$  angeben.

4. Gegeben sind die beiden Funktionen

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & (-1 < t < 1) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

$$x_2(t) = \cos(20 \cdot t) + 2 \cdot \cos(40 \cdot t)$$

Nun wird das Produkt  $x(t) := x_1(t) \cdot x_2(t)$  gebildet.

Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte  $X(\omega)$  von  $x(t)$ , und zeichnen Sie den Grafen von  $X(\omega)$ .

Aus Ihrer grafischen Darstellung von  $X(\omega)$  sollte man die Funktionsgleichung von  $X(\omega)$  herauslesen können.

5. Bei einem kausalen LTI-System seien das Eingangssignal  $u_x(t)$  und das Ausgangssignal  $u_y(t)$  durch die folgende Differentialgleichung verknüpft:

$$(R_1 + R_2) \frac{du_y}{dt}(t) + \frac{1}{C_2} u_y(t) = R_2 \frac{du_x}{dt}(t) + \frac{1}{C_2} u_x(t)$$

- a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion  $H(s)$  des LTI-Systems.  
b) Beurteilen Sie, ob das System stabil ist oder nicht.

6. Einer Laplace-Transformations-Tabelle entnimmt man das folgende Laplace-Transformiertenpaar:

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} \cdot \mathcal{L}\{t\} \longleftrightarrow \frac{1}{(s+)^n} \quad (\text{Re}(s) > -) \quad (*)$$

Prüfen Sie (\*) für den Fall  $n = 2$  nach.

Bestimmen Sie also ausgehend von der Definition der Laplace-Transformation die Laplace-Transformierte der Funktion auf der linken Seite von (\*).

Das Integral zur Bestimmung der Laplace-Transformierten müssen Sie ohne Taschenrechner lösen. Die Stammfunktion des Integranden können Sie jedoch in einer Integraltabelle nachschlagen.

7. Von einem LTI-System kennt man einen Input  $x_1(t)$  und den dazugehörigen Output  $y_1(t)$ :

$$x_1(t) = e^{-t} \cdot \mathcal{L}\{t\}$$

$$y_1(t) = e^{-2(t-1)} \cdot \mathcal{L}\{t-1\}$$

Bestimmen Sie den Output  $y_2(t)$ , welcher zum folgenden Input  $x_2(t)$  gehört:

$$x_2(t) = \mathcal{L}\{t-3\}$$

8. Von einem zeitkontinuierlichen LTI-System kennt man die Stossantwort  $h(t)$  sowie die Fourier-Transformierte  $X(j\omega)$  eines Eingangssignals  $x(t)$ :

$$h(t) = e^t \cdot \mathcal{L}\{t\}$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{4 + \omega^2}$$

Bestimmen Sie das zum Eingangssignal  $x(t)$  gehörige Ausgangssignal  $y(t)$ .

9. Der Frequenzgang  $H(j\omega)$  eines kausalen LTI-Systems ist gegeben durch

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j}$$

Gegeben ist zusätzlich das Eingangssignal

$$x(t) = e^{2t} \cdot \mathcal{L}\{t\}$$

- a) Bestimmen Sie den Wert der Systemfunktion  $H(s)$  an der Stelle  $s = -2$ .  
b) Bestimmen Sie das zum Eingangssignal  $x(t)$  gehörige Ausgangssignal  $y(t)$ .

### Lösungen

$$1. \quad y(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ t & (0 < t < 1) \\ 1 & (t > 1) \end{cases}$$

$$2. \quad y(t) = \frac{2}{3} \sin(t) + \frac{1}{3} \sin(2t)$$

$$3. \quad X_3(k) = \frac{1}{3} X_1\left(\frac{k}{3}\right) + X_2\left(\frac{k}{3}\right) \quad \left( -k \frac{1}{3} \right)$$

4. ...

$$5. \quad \text{a) } H(s) = \frac{R_2 C_2 s + 1}{(R_1 + R_2) C_2 s + 1}$$

b) stabil

6. ...

$$7. \quad y_2(t) = (t-4) - e^{-2(t-4)} \quad (t-4)$$

$$8. \quad y(t) = \frac{1}{3} e^t \quad (t) + \frac{1}{4} e^{2t} \quad (-t) + \frac{1}{12} e^{-2t} \quad (-t)$$

9. a) H(-2) existiert nicht.

$$\text{b) } y(t) = -\frac{1}{3} (e^{-t} - e^{2t}) \quad (t)$$