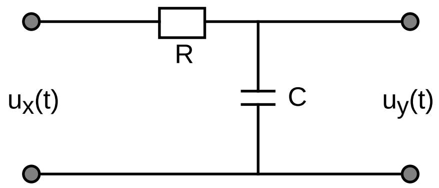
Übung 43 — Diskretisierung von LTI-Systemen
Impulsinvarianz, Differentialgleichung-Differenzengleichung

Lernziele

- ein zeitkontinuierliches LTI-System mit Hilfe der Methoden Impulsinvarianz und Näherung der Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung diskretisieren können.
- beurteilen können, ob ein Eingangs-Ausgangs-Signalpaar eines bestimmten LTI-Systems nach der Diskretisierung der beiden Signale und des Systems immer noch ein Eingangs-Ausgangs-Signalpaar bilden.

Aufgaben

1. Der RC-Stromkreis



bildet ein kausales, zeitkontinuierliches LTI-System mit der Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{1}{1+RCs}$$

Nun wird das System diskretisiert.

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$ des zeitdiskreten LTD-Systems.
   i) Diskretisierung nach der Methode "Impulsinvarianz"
   ii) Diskretisierung nach der Methode "Differentialgleichung-Differenzengleichung"

b) Betrachten Sie den folgenden Input $x(t)$ des ursprünglichen zeitkontinuierlichen LTI-Systems:
$$x(t) = u_x(t) := \varepsilon(t)$$
Diskretisiert man $x(t)$ und den dazugehörigen Output $y(t)$ auf gleiche Weise wie die Stossantwort $h(t)$, so erhält man die zeitdiskreten Signale $x[n]$ und $y[n]$.
Beurteilen Sie, ob $y[n]$ immer noch der zum Input $x[n]$ gehörige Output des diskretisierten LTD-Systems ist.
   i) Diskretisierung nach der Methode "Impulsinvarianz"
   ii) Diskretisierung nach der Methode "Differentialgleichung-Differenzengleichung"
Hinweis: Prüfen Sie nach, ob $Y(z) = H(z)\cdot X(z)$ gilt.

2. * Ein stabiles, zeitkontinuierliches LTI-System mit einer gebrochen rationalen Übertragungsfunktion $H(s)$ werde diskretisiert.

Beurteilen Sie, ob auch das neue zeitdiskrete LTD-System stabil ist.
i) Diskretisierung nach der Methode "Impulsinvarianz"
ii) Diskretisierung nach der Methode "Differentialgleichung-Differenzengleichung"

Lösungen

1. a) i) $H(z) = \frac{1}{RC} \frac{1}{1-e^{-T/RC}z^{-1}}$ $\quad |z| > e^{-T/RC}$

ii) $H(z) = \frac{T}{RC} \frac{1}{1 + \frac{T}{RC} - z^{-1}}$ $\quad |z| > \frac{1}{1 + \frac{T}{RC}}$

b) $X(s) = \frac{1}{s}$ $\quad Re(s) > 0$

$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$ $\quad Re(s) > 0$

i) $X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ $\quad |z| > 1$

$Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T/RC}z^{-1}}$ $\quad |z| > 1$

$\neq H(z)\cdot X(z)$

ii) $X(z) = \frac{T}{1-z^{-1}}$ $\quad |z| > 1$

$Y(z) = \frac{T}{1-z^{-1}} - \frac{T}{1 + \frac{T}{RC} - z^{-1}}$ $\quad |z| > 1$

$= H(z)\cdot X(z)$

2. * i) Jeder Pol z_k von H(z) entspricht einem Pol s_k von H(s).
Aus $Re(s_k) < 0$ folgt $|z_k| < 1$.
LTD stabil

ii) Jeder Pol z_k von H(z) entspricht einem Pol s_k von H(s).
Aus $Re(s_k) < 0$ folgt nicht unbedingt $|z_k| < 1$.
LTD nicht unbedingt stabil