

Übung 42 LTD-System Pole der Übertragungsfunktion, Kausalität, Stabilität

Lernziele

- die Zusammenhänge zwischen den Polen der Übertragungsfunktion eines LTD-Systems und der Kausalität bzw. Stabilität des Systems kennen und bei der Analyse eines LTD-Systems anwenden können.
- einen neuen Sachverhalt analysieren können.

Aufgaben

1. Von der Übertragungsfunktion $H(z)$ eines **kausalen** LTD-Systems sei die Lage der Pole in der komplexen Zahlenebene bekannt.
Beurteilen Sie, was man über die **Stabilität** des Systems aussagen kann, falls
 - a) alle Pole innerhalb des Einheitskreises liegen.
 - b) einige Pole innerhalb und einige ausserhalb des Einheitskreises liegen.
 - c) alle Pole ausserhalb des Einheitskreises liegen.

2. Ein kausales LTD-System sei durch die folgende Differenzgleichung beschrieben:
$$y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n-1]$$
 - a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(z)$.
 - b) Bestimmen Sie die Pole von $H(z)$, und geben Sie den Konvergenzbereich von $H(z)$ an.
 - c) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h[n]$.
 - d) Beurteilen Sie, ob das System stabil ist oder nicht.

3. Die Übertragungsfunktion $H(z)$ eines LTD-Systems sei eine gebrochen rationale Funktion in z^{-1} mit reellen Koeffizienten.
Beurteilen Sie die folgende Behauptung:
Wenn z_1 ein Pol von $H(z)$ ist, dann ist auch die komplex konjugierte Zahl z_1^* ein Pol von $H(z)$.

Lösungen

1.
 - a) i.A. keine Aussage möglich
stabil, falls $H(z)$ gebrochen rational in z^{-1}
 - b) nicht stabil
 - c) nicht stabil

2.
 - a) $H(z) = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}-z^{-2}}$
 - b) Pole bei $z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
Konvergenzbereich $|z| > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
 - c) $h[n] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$ [n]
 - d) nicht stabil

3. ...