Übung 39 z-Transformation
Inverse z-Transformation

Lernziel

- mit Hilfe der Methode "Partialbruchzerlegung" die zu einer z-Transformierten gehörige inverse z-Transformierte bestimmen.

Aufgaben

1. Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode "Partialbruchzerlegung" die zur gegebenen z-Transformierten X(z) gehörige Rücktransformierte x[n].

a) $X(z) = \dfrac{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}{1 + \frac{3}{4} z^{-1} + \frac{1}{8} z^{-2}}$ x[n] rechtsseitig

b) $X(z) = \dfrac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{5}{2} z^{-1} + z^{-2}}$ Fourier-Transformierte $X_a(\omega)$ existiert

c) $X(z) = \dfrac{3}{z - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} z^{-1}}$ Fourier-Transformierte $X_a(\omega)$ existiert

d) $X(z) = \dfrac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a}$ $|z| > \dfrac{1}{|a|}$, a R

2. Gegeben ist der algebraische Ausdruck einer z-Transformierten X(z):

$$X(z) = \frac{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

Bestimmen Sie die Rücktransformierte x[n].

Verwenden Sie die Methode "Partialbruchzerlegung", und berücksichtigen Sie alle Möglichkeiten für den Konvergenzbereich von X(z).

Lösungen

1. a) $x[n] = \left(-3 \left(-\frac{1}{4}\right)^{n} + 4 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \right) \varepsilon[n]$

   b) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \varepsilon[n]$

   c) $x[n] = \left(\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) \varepsilon[n-1]$

   d) $x[n] = -\frac{1}{a}\,\delta[n] - \frac{1-a^2}{a^{n+1}}\,\varepsilon[n-1]$

2. $$X(z) = \frac{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{1}{2} z^{-1} \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

   $|z| > \frac{1}{2}$ $\quad x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \varepsilon[n] + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \varepsilon[n-1] = \delta[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \varepsilon[n-1]$

   $|z| < \frac{1}{2}$ $\quad x[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \varepsilon[-n-1] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \varepsilon[-n] = -\delta[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \varepsilon[-n-1]$