Übung 37 z-Transformation
Eigenschaften der z-Transformation

Lernziele

- neue Sachverhalte (hier: Eigenschaften der z-Transformation) analysieren können.
- die Eigenschaften der z-Transformation bei der Bestimmung der z-Transformierten einer zeitdiskreten Funktion anwenden können.

Aufgaben

1. **Linearität**
   Beweisen Sie die Beziehung (5.6.-11) (*Meyer*, Seite 183), welche die Linearität der z-Transformation ausdrückt.

2. **Zeitverschiebung**
   Beweisen Sie die Beziehung (5.6.-12) (*Meyer*, Seite 183), welche die Zeitverschiebungs-Eigenschaft der z-Transformation ausdrückt.

3. **Faltung im Zeitbereich**
   Meyer liefert auf den Seiten 183 und 184 einen Beweis der Beziehung (5.6.-13), welche die Faltungs-Eigenschaft der z-Transformation ausdrückt.. Dieser Beweis ist jedoch ab dem letzten Ausdruck zuunterst auf der Seite 183 unnötig kompliziert.
   Sie sollen nun den Beweis vereinfachen, indem Sie wie folgt vorgehen:
   - Lassen Sie im letzten Ausdruck zuunterst auf der Seite 183 den Faktor $z^i z^{-i}$ (=1) weg.
   - Formen Sie die zweite Summe des verbleibenden Ausdruckes um, indem Sie die Zeitverschiebungseigenschaft der z-Transformation (*Meyer*, (5.6.-12), Seite 183) verwenden.
   - Wenden Sie die Definition der z-Transformation (*Meyer*, (5.6.-3), Seite 179) an, und der Beweis von (5.6.-13) ist vollbracht!

4. **Anwendung der Eigenschaften der z-Transformation**
   Lösen Sie für die gegebene zeitdiskrete Funktion x[n] die folgenden Teilaufgaben:
   i) Bestimmen Sie den algebraischen Ausdruck für die z-Tansformierte X(z).
   Benützen Sie dazu lediglich die Tabelle auf der Seite 186 im Lehrbuch *Meyer* sowie die Eigenschaften der z-Transformation.
   ii) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der z-Transformierten X(z).
   iii) Geben Sie den algebraischen Ausdruck für die Fourier-Transformierte $X_a(\omega) = \mathrm{FTA}\left(x[n]\right)$ an, falls $X_a(\omega)$ überhaupt existiert.

   a) $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \varepsilon[n+2]$

   b) $x[n] = -3\cdot\varepsilon[-n-3]$

   c) $x[n] = n^2\, a^{2n}\, \varepsilon[n] \qquad \left(a \in R\backslash\{0\}\right)$

   d) $x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \delta[n-3k]$

   e) $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{2\pi}{5}(n+2)\right) \varepsilon[n+2]$

   f) $x[n] = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \varepsilon[n]$

   g) $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \varepsilon[n] - \left(\frac{1}{3}\right)^n \varepsilon[-n-1]$

   h) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

Lösungen

1. ...

2. ...

3. ... $\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-i]\cdot z^{-n} = z^{-i}\cdot H(z)$ ...

4. a) i) $X(z) = \dfrac{16z^2}{1 - \dfrac{1}{4z}}$

ii) $|z| > \dfrac{1}{4}$

iii) $X_a(\omega) = \dfrac{16e^{j2\omega T}}{1 - \dfrac{1}{4e^{j\omega T}}}$

b) i) $X(z) = \dfrac{-3z^3}{1-z}$

ii) $|z| < 1$

iii) $X_a(\omega)$ existiert nicht

c) i) $X(z) = \dfrac{a^2z(z+a^2)}{(z-a^2)^3}$

ii) $|z| > a^2$

iii) $|a| < 1$: $X_a(\omega) = \dfrac{a^2e^{j\omega T}(e^{j\omega T}+a^2)}{(e^{j\omega T}-a^2)^3}$

$|a| \geq 1$: $X_a(\omega)$ existiert nicht

d) i) $X(z) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{64z^3}}$

ii) $|z| > \dfrac{1}{4}$

iii) $X_a(\omega) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{64e^{j3\omega T}}}$

e) i) $X(z) = 9z^2 \dfrac{z^2 - \dfrac{1}{3} z \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)}{z^2 - \dfrac{2}{3} z \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + \dfrac{1}{9}}$

ii) $|z| > \dfrac{1}{3}$

iii) $X_a(\omega) = 9e^{j2\omega T} \dfrac{e^{j2\omega T} - \dfrac{1}{3} e^{j\omega T} \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)}{e^{j2\omega T} - \dfrac{2}{3} e^{j\omega T} \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + \dfrac{1}{9}}$

f) i) $X(z) = \dfrac{2 - \dfrac{3}{4} z^{-1}}{\left(1 - \dfrac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4} z^{-1}\right)} = \dfrac{2z^2 - \dfrac{3}{4} z}{\left(z - \dfrac{1}{2}\right)\left(z - \dfrac{1}{4}\right)}$

ii) $|z| > \dfrac{1}{2}$

iii) $X_a(\omega) = \dfrac{2 - \dfrac{3}{4} e^{-j\omega T}}{\left(1 - \dfrac{1}{2} e^{-j\omega T}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4} e^{-j\omega T}\right)} = \dfrac{2e^{j2\omega T} - \dfrac{3}{4} e^{j\omega T}}{\left(e^{j\omega T} - \dfrac{1}{2}\right)\left(e^{j\omega T} - \dfrac{1}{4}\right)}$

g) i) $X(z) = \dfrac{2 - \frac{7}{12} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3} z^{-1}\right)} = \dfrac{2z^2 - \frac{7}{12} z}{\left(z - \frac{1}{4}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)}$

ii) $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$

iii) $X_a(\omega)$ existiert nicht

h) i) $X(z) = -\frac{3}{2} \dfrac{z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-2z^{-1})}$ (vgl. Übung 36, Aufgabe 3e)

ii) $\frac{1}{2} < |z| < 2$

iii) $X_a(\omega) = -\frac{3}{2} \dfrac{e^{-j\omega T}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega T}\right)(1-2e^{-j\omega T})}$