Übung 36 z-Transformation
Konvergenzbereich, Bestimmung der z-Transformierten

Lernziele

- Eigenschaften des Konvergenzbereiches der z-Transformation kennen und verstehen.
- die z-Transformierte einer einfacheren zeitdiskreten Funktion von Hand bestimmen können.

Aufgaben

1. Begründen Sie die folgende Aussage über den Konvergenzbereich der z-Transformierten:

   "Der Konvergenzbereich der z-Transformierten X(z) einer zeitdiskreten Funktion x[n] hängt nur vom Betrag von z ab."

   Betrachten Sie dazu die Definition der z-Transformation, und untersuchen Sie, warum die Konvergenz der darin enthaltenen Summe nur vom Betrag von z abhängt.

2. Der Konvergenzbereich der Laplace-Transformierten X(s) von zeit**kontinuierlichen** Funktionen x(t) besitzt die folgenden Eigenschaften (vgl. Kapitel "Laplace-Transformation"):

x(t) rechtsseitig	Konvergenzbereich von X(s) rechtsseitig, d.h. $\mathrm{Re}(s)>\sigma_0$
x(t) linksseitig	Konvergenzbereich von X(s) linksseitig, d.h. $\mathrm{Re}(s)<\sigma_0$

   Der Konvergenzbereich der z-Transformierten X(z) von zeit**diskreten** Funktionen x[n] besitzt die beiden dazu analogen Eigenschaften:

x[n] rechtsseitig	Konvergenzbereich von X(z) umfasst in der komplexen z-Ebene ein Gebiet ausserhalb eines Kreises, d.h. $\lvert z\rvert>r_0$
x[n] linksseitig	Konvergenzbereich von X(z) umfasst in der komplexen z-Ebene ein Gebiet innerhalb eines Kreises, d.h. $\lvert z\rvert<r_0$ (gegebenenfalls ohne z=0)

   Versuchen Sie, diese beiden Eigenschaften der z-Transformierten X(z) zu verstehen.
   Betrachten Sie dazu die Definition der z-Transformation und die Konvergenz der darin enthaltenen Summe.

3. Bestimmen Sie für die gegebene zeitdiskrete Funktion x[n]

   - den algebraischen Ausdruck für die z-Transformierte X(z).
   - den Konvergenzbereich von X(z).
   - den Pol bzw. die Pole von X(z).
   - eine grafische Darstellung des Konvergenzbereiches und des Pols bzw. der Pole.

   a) $x[n] = \delta[n-1]$

   b) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \varepsilon[n]$

   c) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \varepsilon[-n]$

   d) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\varepsilon[n] - \varepsilon[n-10]\right)$

   e) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

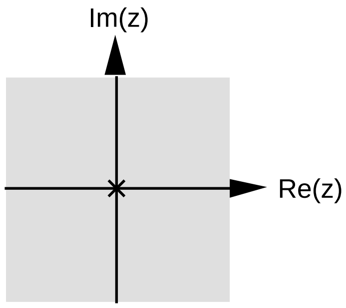
Lösungen

1. $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, (r \cdot e^{j\phi})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, r^{-n} \cdot e^{-jn\phi}$

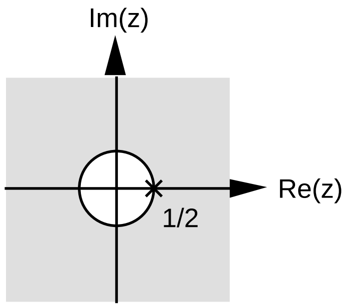
Nur r, der Betrag von z, leistet einen Beitrag zur Konvergenz der Summe.
ϕ, das Argument von z, hat keinen Einfluss auf die Konvergenz der Summe.

2. x[n] rechtsseitig
Für die Konvergenz der Summe ist das Verhalten der Summanden für $n \to \infty$ massgebend.
Je grösser r ist, desto besser ist wegen des Faktors r^{-n} die Konvergenz der Summe.
Wenn die Summe für ein bestimmtes $|z| = r_0$ konvergiert, so konvergiert sie für alle $|z| > r_0$
x[n] linksseitig
Für die Konvergenz der Summe ist das Verhalten der Summanden für $n \to -\infty$ massgebend.
Je kleiner r ist, desto besser ist wegen des Faktors r^{-n} die Konvergenz der Summe.
Wenn die Summe für ein bestimmtes $|z| = r_0$ konvergiert, so konvergiert sie für alle $|z| < r_0$

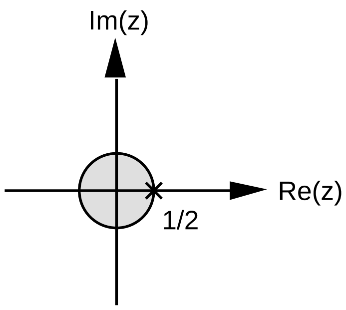
3. a) $X(z) = z^{-1} = \frac{1}{z}$ $|z|>0$ Pol bei $z=0$



b) $X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$ $|z|>\frac{1}{2}$ Pol bei $z=\frac{1}{2}$



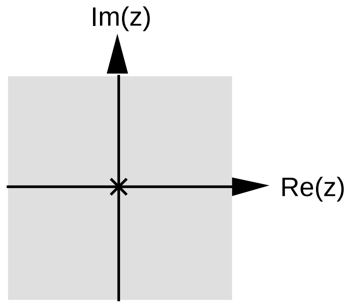
c) $X(z) = -\frac{1}{2}\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{z-\frac{1}{2}}$ $|z|<\frac{1}{2}$ Pol bei $z=\frac{1}{2}$



d) $$X(z) = \begin{cases} \dfrac{1-(2z)^{-10}}{1-(2z)^{-1}} & \left(|z|>0 \quad z\neq\frac{1}{2}\right) \\ 10 & \left(z=\frac{1}{2}\right) \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{z^{10}-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{z^{9}\left(z-\frac{1}{2}\right)} & \left(|z|>0 \quad z\neq\frac{1}{2}\right) \\ 10 & \left(z=\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Pol bei z=0

(Pol und Nullstelle bei $z=\frac{1}{2}$ heben sich auf.)



e) $$X(z) = -\frac{3}{2}\,\frac{z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-2z^{-1})} = -\frac{3}{2}\,\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)} \qquad \frac{1}{2}<|z|<2$$

Pole bei $z=\frac{1}{2}$, z=2