Übung 33 Diskrete Fourier-Transformation (DFT) Schnelle Fourier-Transformation (FFT)

Lernziele

- neue Sachverhalte bearbeiten können.
- den FFT-Algorithmus von Cooley und Tukey zur Bestimmung der diskreten Fourier-Transformierten eines zeitdiskreten Signales verstehen.

Aufgaben

Studieren Sie im Buch *Meyer* den Abschnitt *5.3.4 Die schnelle Fourier-Transformation (FFT)* (Seiten 153 bis 157).
Bearbeiten Sie dabei parallel die folgenden Aufgaben, wenn Sie bei der entsprechenden Textstelle angelangt sind.

Seite 153, Ende des ersten Absatzes ("... wird für grosses N der Rechenaufwand rasch prohibitiv hoch."):

1. * Die diskrete Fourier-Transformierte X[m] eines reellen Signales x[n] besteht aus den N periodisch wiederkehrenden komplexen Zahlen X[0], ..., X[N-1] (*Meyer*, Formel (5.3.-10), Seite 151).
Wenn x[n] reell ist, genügt es, lediglich N/2 Spektralwerte zu berechnen (*Meyer*, Formel (5.3.-11), Seite 151).
An welcher Stelle wird bei der Herleitung der Formel (5.3.-11) ausgenützt, dass x[n] reell ist?

Seite 154, Ende des ersten Absatzes ("... in diesem Falle sehr effizient programmieren."):

2. Die Blocklänge N einer Zeitsequenz x[n] sei eine Zweierpotenz, d.h. $N = 2^k$ $(k \quad N)$.
x[n] werde nun in einem ersten Schritt in zwei gleich lange Zeitsequenzen aufgeteilt. In einem zweiten Schritt werden die beiden Teilsequenzen wieder je in zwei gleich lange Sequenzen aufgeteilt, etc., bis die ursprüngliche Zeitsequenz x[n] schliesslich in lauter Blöcke der Länge 2 aufgeteilt ist.
Wie viele Schritte sind insgesamt notwendig, um x[n] auf diese Art in lauter Zweierblöcke aufzuteilen?
a) $N = 8 = 2^3$
b) allgemeines $N = 2^k$

Seite 154, nach der Formel (5.3.-18):

3. * In der Herleitung der Formel (5.3.-18) wird die folgende Umformung verwendet:
$$e^{-j(2\pi/N)mn} = \left(e^{-j(2\pi/N)}\right)^{mn}$$
Beurteilen Sie, ob auch die nachstehende Beziehung gilt:
$$e^{-j(2\pi/N)mn} = \left(e^{-j2\pi mn}\right)^{1/N}$$

Seite 154, nach der Herleitung $W_N^{k+N} = ... = W_N^k$

4. Für N := 8 gibt es 8 mögliche komplexe Werte für W_8^{mn}.
Geben Sie diese 8 Zahlen sowohl analytisch als auch grafisch (in der komplexen Zahlenebene) an.

5. * Beweisen Sie die folgende Beziehung:
$$W_N^k = W_{pN}^{pk} \quad (p \quad N)$$

Seite 155, vor dem Absatz "Bei grossem N ist also eine wesentliche Einsparung möglich. Die beiden ..."

6. * Zeigen Sie, dass die folgende Beziehung richtig ist, welche im oberen Teil der Seite 155 bei der Umformung von A[m] bzw. B[m] verwendet wird:
$$W_P^{mn} = W_N^{2mn}$$

7. Bestimmen Sie die Anzahl Multiplikationen, die ausgeführt werden müssen, wenn man X[m] gemäss der Formel (5.3.-20) berechnet.

Seite 155, vor dem letzten Absatz ("Bild 5.3.-3 zeigt die Aufteilung der Abtastwerte für ...")

8. In der Aufgabe 7 haben Sie bestimmt, wieviele Multiplikationen bei der Berechnung der $N = 2^k$ $(k \quad N)$ Werte von X[m] nach **einem** Aufteilungsschritt noch nötig sind.

Bestimmen Sie die Anzahl nötiger Multiplikationen

a) nach **zwei** Aufteilungsschritten.

b) nach **drei** Aufteilungsschritten.

c) nach allen **k - 1** Aufteilungsschritten.

9. Die FFT-Spalte der Tabelle 5.3.-1 enthält falsche Zahlen.
Bestimmen Sie die richtige Anzahl Multiplikationen in der FFT für alle vorgegebenen Werte von N.
Benützen Sie dazu das Ergebnis aus der Aufgabe 8 c).

10. Führen Sie den auf den Seiten 154 und 155 erläuterten FFT-Algorithmus konkret durch.
Das Ziel besteht darin, X[m] auszudrücken durch einen Term, welcher nur noch die Abtastwerte x[n] (n = 0, ... , N-1) und den "twiddle factor" W_N enthält.

a) N = 4

b) N = 8

Seite 157, am Schluss des Abschnittes 5.3.4

11. * Versuchen Sie zu verstehen, wie man ein Signalflussdiagramm für die FFT gemäss den Bildern 5.3.-4 (N = 2) und 5.3.-5 (N = 8) liest.
Lesen Sie aus dem Bild 5.3.-5 den Wert für X[5] heraus, und vergleichen Sie mit dem Resultat aus der Aufgabe 10 b).

Lösungen

1. * Beim letzten Gleichheitszeichen wird ausgenützt, dass $x[n]^* = x[n]$.

2. a) Anzahl Schritte = 2
   b) Anzahl Schritte = $k - 1 = \log_2(N) - 1$

3. * nein, Problem: Auf der linken Seite steht eine eindeutig definierte komplexe Zahl.
   Auf der rechten Seite stehen alle N komplexen Wurzeln von $e^{-j2\pi mn} = 1$

4.
$$
\begin{aligned}
W_8^0 &= \left(e^{-j(2\pi/8)}\right)^0 = \left(e^{-j(\pi/4)}\right)^0 = 1\\
W_8^1 &= \left(e^{-j(2\pi/8)}\right)^1 = \left(e^{-j(\pi/4)}\right)^1 = e^{-j(\pi/4)}\\
W_8^2 &= \left(e^{-j(2\pi/8)}\right)^2 = \left(e^{-j(\pi/4)}\right)^2 = e^{-j(\pi/2)} = -j\\
W_8^3 &= \left(e^{-j(2\pi/8)}\right)^3 = \left(e^{-j(\pi/4)}\right)^3 = e^{-j(3\pi/4)}\\
W_8^4 &= \left(e^{-j(2\pi/8)}\right)^4 = \left(e^{-j(\pi/4)}\right)^4 = e^{-j\pi} = -1\\
W_8^5 &= \left(e^{-j(2\pi/8)}\right)^5 = \left(e^{-j(\pi/4)}\right)^5 = e^{-j(5\pi/4)}\\
W_8^6 &= \left(e^{-j(2\pi/8)}\right)^6 = \left(e^{-j(\pi/4)}\right)^6 = e^{-j(3\pi/2)} = j\\
W_8^7 &= \left(e^{-j(2\pi/8)}\right)^7 = \left(e^{-j(\pi/4)}\right)^7 = e^{-j(7\pi/4)}
\end{aligned}
$$

5. * $W_{pN}^{pk} = \left(e^{-j(2\pi/pN)}\right)^{pk} = e^{-j(2\pi/pN)pk} = e^{-j(2\pi/N)k} = W_N^k$

6. * $W_P^{mn} = W_{N/2}^{mn} = W_{2(N/2)}^{2(mn)}$ (siehe Aufgabe 5) $= W_N^{2mn}$

7. Summe für A[m] erfordert N/2 Multiplikationen, A[m] besteht aus N/2 Werten $\Big\}$ $\frac{N}{2}\cdot\frac{N}{2}$ Multiplikationen

   B[m] (analog) $\frac{N}{2}\cdot\frac{N}{2}$ Multiplikationen

   Multiplikation zwischen W_N^m und B[m] in (5.3.-20), X[m] besteht aus N Werten $\Big\}$ N Multiplikationen

$$\frac{N}{2}\cdot\frac{N}{2} + \frac{N}{2}\cdot\frac{N}{2} + N = \frac{N^2}{2} + N \text{ Multiplikationen}$$

8. a) Die je $\frac{N}{2}\cdot\frac{N}{2}$ Multiplikationen für A[m] und B[m] können je reduziert werden auf
   $\frac{N}{4}\cdot\frac{N}{4} + \frac{N}{4}\cdot\frac{N}{4} + \frac{N}{2}$ Multiplikationen.
$$2\cdot\left(\frac{N}{4}\cdot\frac{N}{4} + \frac{N}{4}\cdot\frac{N}{4} + \frac{N}{2}\right) + N = \frac{N^2}{4} + 2N \text{ Multiplikationen}$$
   b) (analog wie in a))
$$2\cdot\left(2\cdot\left(\frac{N}{8}\cdot\frac{N}{8} + \frac{N}{8}\cdot\frac{N}{8} + \frac{N}{4}\right) + \frac{N}{2}\right) + N = \frac{N^2}{8} + 3N \text{ Multiplikationen}$$
   c) (analog)
$$\frac{N^2}{2^{k-1}} + (k-1)N = N\left(\log_2(N) + 1\right) \text{ Multiplikationen}$$

9.

Blocklänge	Anzahl Multiplikationen	
N	N^2 (DFT)	$N\left(\log_2(N) + 1\right)$ (FFT)
8	64	32
32	1'024	192
128	16'384	1'024
256	65'536	2'304
512	262'144	5'120
1'024	1'048'576	11'264
2'048	4'194'304	24'576
4'096	16'277'216	53'248

10. a) nach dem 1. und einzigen Aufteilungsschritt:

$$\begin{aligned}
X[m] &= A[m] + W_4^{m}\cdot B[m] \\
&= \left(a[0]\cdot W_4^{2m0} + a[1]\cdot W_4^{2m1}\right) + W_4^{m}\cdot\left(b[0]\cdot W_4^{2m0} + b[1]\cdot W_4^{2m1}\right) \\
&= \left(x[0]\cdot W_4^{2m0} + x[2]\cdot W_4^{2m1}\right) + W_4^{m}\cdot\left(x[1]\cdot W_4^{2m0} + x[3]\cdot W_4^{2m1}\right) \\
&= \left(x[0] + x[2]\cdot W_4^{2m}\right) + W_4^{m}\cdot\left(x[1] + x[3]\cdot W_4^{2m}\right)
\end{aligned}$$

b) nach dem 1. Aufteilungsschritt:

$$X[m] = A[m] + W_8^{m}\cdot B[m]$$

nach dem 2. Aufteilungsschritt:

$$\begin{aligned}
X[m] &= \left(\ldots + W_4^{m}\cdot\ldots\right) + W_8^{m}\cdot\left(\ldots + W_4^{m}\cdot\ldots\right) \\
&= \Big(\left(x[0]\cdot W_4^{2m0} + x[4]\cdot W_4^{2m1}\right) + W_4^{m}\cdot\left(x[2]\cdot W_4^{2m0} + x[6]\cdot W_4^{2m1}\right)\Big) \\
&\quad + W_8^{m}\cdot\Big(\left(x[1]\cdot W_4^{2m0} + x[5]\cdot W_4^{2m1}\right) + W_4^{m}\cdot\left(x[3]\cdot W_4^{2m0} + x[7]\cdot W_4^{2m1}\right)\Big) \\
&= \Big(\left(x[0] + x[4]\cdot W_2^{m}\right) + W_4^{m}\cdot\left(x[2] + x[6]\cdot W_2^{m}\right)\Big) \\
&\quad + W_8^{m}\cdot\Big(\left(x[1] + x[5]\cdot W_2^{m}\right) + W_4^{m}\cdot\left(x[3] + x[7]\cdot W_2^{m}\right)\Big) \\
&= \Big(\left(x[0] + x[4]\cdot W_8^{4m}\right) + W_8^{2m}\cdot\left(x[2] + x[6]\cdot W_8^{4m}\right)\Big) \\
&\quad + W_8^{m}\cdot\Big(\left(x[1] + x[5]\cdot W_8^{4m}\right) + W_8^{2m}\cdot\left(x[3] + x[7]\cdot W_8^{4m}\right)\Big)
\end{aligned}$$

11. * aus Bild 5.3.-5:

$$\begin{aligned}
X[5] &= \ldots + W_8^{5}\cdot\ldots \\
&= \left(\ldots + W_8^{2}\cdot\ldots\right) + W_8^{5}\cdot\left(\ldots + W_8^{2}\cdot\ldots\right) \\
&= \Big(\left(x[0] + W_8^{4}\cdot x[4]\right) + W_8^{2}\cdot\left(x[2] + W_8^{4}\cdot x[6]\right)\Big) \\
&\quad + W_8^{5}\cdot\Big(\left(x[1] + W_8^{4}\cdot x[5]\right) + W_8^{2}\cdot\left(x[3] + W_8^{4}\cdot x[7]\right)\Big) \\
&= x[0] + W_8^{4}\cdot x[4] + W_8^{2}\cdot x[2] + W_8^{2}\cdot W_8^{4}\cdot x[6] \\
&\quad + W_8^{5}\cdot x[1] + W_8^{5}\cdot W_8^{4}\cdot x[5] + W_8^{5}\cdot W_8^{2}\cdot x[3] + W_8^{5}\cdot W_8^{2}\cdot W_8^{4}\cdot x[7]
\end{aligned}$$

aus Aufgabe 10 b):

$$\begin{aligned}
X[5] &= \Big(\left(x[0] + x[4]\cdot W_8^{4\cdot 5}\right) + W_8^{2\cdot 5}\cdot\left(x[2] + x[6]\cdot W_8^{4\cdot 5}\right)\Big) \\
&\quad + W_8^{5}\cdot\Big(\left(x[1] + x[5]\cdot W_8^{4\cdot 5}\right) + W_8^{2\cdot 5}\cdot\left(x[3] + x[7]\cdot W_8^{4\cdot 5}\right)\Big) \\
&= x[0] + W_8^{20}\cdot x[4] + W_8^{10}\cdot x[2] + W_8^{10}\cdot W_8^{20}\cdot x[6] \\
&\quad + W_8^{5}\cdot x[1] + W_8^{5}\cdot W_8^{20}\cdot x[5] + W_8^{5}\cdot W_8^{10}\cdot x[3] + W_8^{5}\cdot W_8^{10}\cdot W_8^{20}\cdot x[7]
\end{aligned}$$

Die beiden Ausdrücke sind wegen $W_8^{10} = W_8^{2}$ und $W_8^{20} = W_8^{4}$ identisch.

$$\left(\left.\begin{array}{l} W_8^{10} = e^{-j(2\pi/8)10} = e^{-j(\pi/4)10} = e^{-j\pi/2} = -j \\ W_8^{2} = e^{-j(2\pi/8)2} = e^{-j(\pi/4)2} = e^{-j\pi/2} = -j \end{array}\right\} \quad W_8^{10} = W_8^{2}\right)$$