Übung 32 — Diskrete Fourier-Transformation (DFT) Informationsgehalt der DFT, Zusammenhang DFT-FR

Lernziele

- einen neuen Sachverhalt bearbeiten können.
- wissen und verstehen, wieviel Information in der diskreten Fourier-Transformierten einer zeitdiskreten Funktion enthalten ist.
- den Zusammenhang zwischen der diskreten Fourier-Transformierten einer zeitdiskreten Funktion und den Fourier-Koeffizienten der dazugehörigen periodisch fortgesetzten Abtastfunktion verstehen.
- verstehen, wie weit die diskrete Fourier-Transformierte einer zeitdiskreten Funktion den Fourier-Koeffizienten einer periodischen, zeitkontinuierlichen Funktion entsprechen.

Aufgaben

Informationsgehalt der DFT

1. Bei der Bestimmung der diskreten Fourier-Transformierten X[m] einer zeitdiskreten, reellen Funktion x[n] werden N voneinander unabhängige Informationen über x[n] verwendet, nämlich die **N reellen Zahlen** x[0], x[1], ... , x[N-1].
In der Transformierten X[m] sollten daher N voneinander unabhängige Informationen über x[n] enthalten sein, obwohl X[m] scheinbar aus unendlich vielen Informationen besteht, nämlich aus den **unendlich vielen komplexen Zahlen** ... , X[-2], X[-1], X[0], X[1], X[2], ...

   In den Formeln (5.3.-10) und (5.3.-11) (*Meyer*, Seite 151) sind Eigenschaften der DFT ausgedrückt. Aus diesen Eigenschaften folgt, dass die Werte in X[m] voneinander abhängen. Tatsächlich enthält die Transformierte X[m] nur N voneinander unabhängige Informationen über x[n], d.h. dass X[m] aus nur N voneinander unabhängigen reellen Zahlen besteht.

   a) Prüfen Sie die Herleitung der Formeln (5.3.-10) und (5.3.-11) (*Meyer*, Seite 151) nach.

   b) Geben Sie an, aus welchen N voneinander unabhängigen reellen Zahlen die Transformierte X[m] besteht, falls
      i) $N = 7$
      ii) $N = 6$
      iii) * N beliebig jedoch **ungerade** ist.
      iv) * N beliebig jedoch **gerade** ist.

Zusammenhang DFT - FR

2. Gegeben ist die zeitkontinuierliche Funktion $x(t) = e^{-t}\varepsilon(t)$

   a) Skizzieren Sie für allgemeines T und N die Grafen der folgenden, auf dem Theorieblatt definierten Funktionen:

$x(t)$	$x_N(t)$	$\tilde{x}_N(t)$
$x_a(t)$	$x_{N,a}(t)$	$\tilde{x}_{N,a}(t)$
$x[n]$	$x_N[n]$	$\tilde{x}_N[n]$

   b) Bestimmen Sie
      i) die Fourier-Transformierte $X_{N,a}(\omega)$ von $x_{N,a}(t)$ bzw. $x_N[n]$.
      ii) die Fourier-Koeffizienten $c_{a,m}$ von $\tilde{x}_{N,a}(t)$.
      Hinweis: $c_{a,m}$ sind Abtastwerte von $X_{N,a}(\omega)$
      iii) die diskrete Fourier-Transformierte X[m] von x[n].
      iv) Vergleichen Sie i) mit ii), und stellen Sie fest, dass gilt:

$$c_{a,m} = \frac{1}{NT} X[m]$$

   c) (siehe Seite 2)

c) Studieren Sie das MAPLE-File dft.mws.
Sie finden es unter
- http://www.tel.fh-htwchur.ch/~borer → Mathematik → Unterlagen (...)
- Public on 'Htachur1\Usr' (G:) → Tel → Maple-Files → DFTmaple → dft.mws

i) Betrachten Sie die Grafen der Fourier-Transformierten $X(\omega)$ von $x(t)$ und der Fourier-Transformierten $X_a(\omega)$ von $x_a(t)$.
Stellen Sie dabei fest, dass $X_a(\omega)$ eine periodische Fortsetzung von $X(\omega)$ ist.

ii) Betrachten Sie die Grafen der Fourier-Transformierten $X_N(\omega)$ von $x_N(t)$ und der Fourier-Transformierten $X_{N,a}(\omega)$ von $x_{N,a}(t)$.
Stellen Sie dabei fest, dass $X_{N,a}(\omega)$ eine periodische Fortsetzung von $X_N(\omega)$ ist.

iii) Vergleichen Sie die diskrete Fourier-Transformierte $X[m]$ von $x[n]$ mit den Fourier-Koeffizienten $c_{a,m}$ von $\tilde{x}_{N,a}(t)$, und stellen Sie fest, dass gilt:

$$c_{a,m} = \frac{1}{NT} X[m]$$

Variieren Sie die Abtastperiode T und die Länge N des Zeitfensters, und beurteilen Sie jeweils, wie gut das Abtasttheorem erfüllt ist.

3. Im Unterricht wurde hergeleitet, dass die Werte der diskreten Fourier-Transformierten $X[m]$ der Funktion $x[n]$ bis auf eine multiplikative Konstante NT gerade die Fourier-Koeffizienten $c_{a,m}$ von $\tilde{x}_{N,a}(t)$ sind:

$$c_{a,m} = \frac{1}{NT} X[m]$$

Sie sollen in dieser Aufgabe zeigen, dass **unter Einhaltung des Abtasttheorems** die folgenden drei Aussagen richtig sind:

(1) Die Fourier-Koeffizienten $c_{a,m}$ von $\tilde{x}_{N,a}(t)$ sind bis auf eine multiplikative Konstante T gerade die Fourier-Koeffizienten c_m der Funktion $\tilde{x}_N(t)$:

$$c_{a,m} = \frac{1}{T} c_m$$

(2) Die Werte der diskreten Fourier-Transformierten $X[m]$ der Funktion $x[n]$ sind bis auf eine multiplikative Konstante N gerade die Fourier-Koeffizienten c_m der Funktion $\tilde{x}_N(t)$:

$$c_m = \frac{1}{N} X[m]$$

(3) Wird eine periodische Funktion $x(t)$ der Grundperiode T_0 so abgetastet und gefenstert, dass die Fensterlänge NT gerade gleich T_0 beträgt, so sind die Werte der diskreten Fourier-Transformierten $X[m]$ bis auf eine multiplikative Konstante N die Fourier-Koeffizienten c_m der Funktion $x(t)$.

Lösen Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

a) Skizzieren Sie den Grafen der Fourier-Transformierten $\tilde{X}_N(\omega)$ von $\tilde{x}_N(t)$.
Nehmen Sie dabei an, dass das Frequenzspektrum $\tilde{X}_N(\omega)$ begrenzt sei.

b) Skizzieren Sie den Grafen der Fourier-Transformierten $\tilde{X}_{N,a}(\omega)$ von $\tilde{x}_{N,a}(t)$.
Nehmen Sie dabei an, dass beim Übergang $\tilde{x}_N(t) \to \tilde{x}_{N,a}(t)$ das Abtasttheorem eingehalten werde.

c) Die Grafen von $\tilde{X}_{N,a}(\omega)$ und $\tilde{X}_N(\omega)$ bestehen je aus einer Linearkombination von δ-Funktionen.
Vergleichen Sie die "Gewichte" der δ-Peaks in $\tilde{X}_{N,a}(\omega)$ und $\tilde{X}_N(\omega)$, und zeigen Sie, dass daraus die Aussage (1) folgt.

d) Zeigen, Sie dass aus dem im Unterricht hergeleiteten Zusammenhang zwischen $c_{a,m}$ und $X[m]$ zusammen mit der Aussage (1) die Aussage (2) folgt.

e) Zeigen Sie, dass aus den Erkenntnissen der Aufgaben a) bis d) die Aussage (3) folgt.

Lösungen

1. a) …

b) i) X[0] (reell!) bzw. X[0] (reell!)
$|X[1]|$, $\arg(X[1])$ bzw. $\mathrm{Re}(X[1])$, $\mathrm{Im}(X[1])$
$|X[2]|$, $\arg(X[2])$ bzw. $\mathrm{Re}(X[2])$, $\mathrm{Im}(X[2])$
$|X[3]|$, $\arg(X[3])$ bzw. $\mathrm{Re}(X[3])$, $\mathrm{Im}(X[3])$

ii) X[0] (reell!) bzw. X[0] (reell!)
$|X[1]|$, $\arg(X[1])$ bzw. $\mathrm{Re}(X[1])$, $\mathrm{Im}(X[1])$
$|X[2]|$, $\arg(X[2])$ bzw. $\mathrm{Re}(X[2])$, $\mathrm{Im}(X[2])$
X[3] (reell!) bzw. X[3] (reell!)

iii) * X[0] (reell!) bzw. X[0] (reell!)
$|X[1]|$, $\arg(X[1])$ bzw. $\mathrm{Re}(X[1])$, $\mathrm{Im}(X[1])$
… bzw. …
$\left|X\left[\frac{N-1}{2}\right]\right|$, $\arg\left(X\left[\frac{N-1}{2}\right]\right)$ bzw. $\mathrm{Re}\left(X\left[\frac{N-1}{2}\right]\right)$, $\mathrm{Im}\left(X\left[\frac{N-1}{2}\right]\right)$

iv) * X[0] (reell!) bzw. X[0] (reell!)
$|X[1]|$, $\arg(X[1])$ bzw. $\mathrm{Re}(X[1])$, $\mathrm{Im}(X[1])$
… bzw. …
$\left|X\left[\frac{N}{2}-1\right]\right|$, $\arg\left(X\left[\frac{N}{2}-1\right]\right)$ bzw. $\mathrm{Re}\left(X\left[\frac{N}{2}-1\right]\right)$, $\mathrm{Im}\left(X\left[\frac{N}{2}-1\right]\right)$
$X\left[\frac{N}{2}\right]$ (reell!) bzw. $X\left[\frac{N}{2}\right]$ (reell!)

2. a) …

b) i) $$X_{N,a}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N[n]\, e^{-jn\omega T} = \dots = \frac{1 - \left(e^{-T}e^{-j\omega T}\right)^N}{1 - e^{-T}e^{-j\omega T}}$$

ii) $T_0 = NT$ = Grundperiode von $\tilde{x}_{N,a}(t)$, $\omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$

$$c_{a,m} = \frac{1}{T_0} X_{N,a}(m\omega_0) = \dots = \frac{1}{NT}\,\frac{1 - e^{-NT}}{1 - e^{-T}e^{-j2\pi m/N}}$$

iii) $$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi mn/N} = \dots = \frac{1 - e^{-NT}}{1 - e^{-T}e^{-j2\pi m/N}}$$

iv) …

c) …

3. a) $\tilde{X}_N(\omega)$ ist eine Linearkombination von δ-Funktionen an den Stellen $\omega = m \cdot \frac{2\pi}{T_0}$ $(m \in \mathbb{Z})$.

b) $\tilde{X}_{N,a}(\omega)$ geht aus $\tilde{X}_N(\omega)$ hervor durch eine periodische Fortsetzung mit der Grunderiode $\frac{2\pi}{T}$ und einer Gewichtung mit dem Faktor $\frac{1}{T}$.

c) (siehe Seite 4)

c) Die "Gewichte" der δ-Peaks in $\tilde{X}_N(\omega)$ betragen $2\pi\cdot c_m$.

Die "Gewichte" der δ-Peaks in $\tilde{X}_{N,a}(\omega)$ betragen einerseits $2\pi\cdot c_{a,m}$. Wegen der periodischen Fortsetzung und Gewichtung von $\tilde{X}_N(\omega)$ betragen sie andererseits $\frac{1}{T}\cdot 2\pi\cdot c_m$.

$$2\pi\cdot c_{a,m} = \frac{1}{T}\cdot 2\pi\cdot c_m$$

$$c_{a,m} = \frac{1}{T}c_m \qquad (1)$$

d) …

e) Wird x(t) so abgetastet und gefenstert, dass $NT = T_0$, dann folgt $x(t) = \tilde{x}_N(t)$, und aus (2) folgt (3).