Übung 30 Fourier-Transformation für Abtastsignale (FTA) Abtasttheorem, Rekonstruktion, Reale Abtastung

Lernziele

- selbstständig und in Gruppen neue Sachverhalte bearbeiten.
- das Abtasttheorem von Shannon kennen und verstehen.
- verstehen, dass bei nicht-erfülltem Abtasttheorem die ursprüngliche zeitkontinuierliche Funktion aus der abgetasteten Funktion nicht mehr rekonstruiert werden kann.
- verstehen, dass verschiedene Funktionen bei gleicher Abtastperiode auf gleiche Abtastfunktionen führen können.
- wissen und verstehen, dass man in der Praxis nicht ideal abtasten kann und dass man deshalb eine Funktion, die abgetastet wurde, nicht mehr vollständig exakt rekonstruieren kann.

Aufgaben

Abtasttheorem, Rekonstruktion

1. Studieren Sie im Buch *Meyer* den Abschnitt *5.2.4 Das Abtasttheorem* (Seiten 140 bis 142).

2. Erklären Sie mit Hilfe einer grafischen Darstellung die folgende Aussage (*Meyer*, Seite 142 Mitte): *"Dieses Filter hat keinen unendlich steilen Übergangsbereich, deshalb ist eine leichte Überabtastung notwendig."*

3. Lesen Sie im Buch *Meyer* die ersten vier Zeilen des Abschnittes *5.2.6 Die Rekonstruktion von abgetasteten Signalen* (Seite 144).

4. Gegeben ist die zeitkontinuierliche Funktion $x(t) = \sin(\omega_0 t)$.
Aus $x(t)$ erhält man die abgetastete Funktion $x_a(t)$, indem man $x(t)$ mit der Abtastperiode T bzw. mit der Abtastfrequenz $\omega_a := 2\pi/T$ abtastet.
Aus $x_a(t)$ erhält man die Funktion $y(t)$, indem man $x_a(t)$ mit einem idealen Tiefpassfilter mit der Grenzfrequenz $\omega_a/2$ filtert und mit dem Faktor T gewichtet. Das Tiefpassfilter inklusive Gewichtung kann dabei als LTI-System aufgefasst werden mit dem Frequenzgang $H(\omega)$. Wenn bei der Abtastung das Abtasttheorem erfüllt ist, ist $y(t)$ die ursprüngliche Funktion $x(t)$, d.h. $y(t) = x(t)$.

   a) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten $X(\omega)$ der Funktion $x(t)$.

   Nehmen Sie nun an, das **Abtasttheorem** sei **erfüllt**, d.h. es gelte $\omega_a > 2\omega_0$.

   b) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten $X_a(\omega)$ der abgetasteten Funktion $x_a(t)$.
   c) Zeichnen Sie den Grafen des Frequenzganges $H(\omega)$ des Tiefpassfilters inklusive Gewichtung.
   d) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten $Y(\omega)$ der Funktion $y(t)$.
   Stellen Sie dabei fest, dass $Y(\omega) = X(\omega)$ und somit $y(t) = x(t)$ gilt.

   Nehmen Sie nun an, das **Abtasttheorem** sei **nicht erfüllt**, d.h. es gelte $\omega_a < 2\omega_0$.

   e) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten $X_a(\omega)$ der abgetasteten Funktion $x_a(t)$.
   f) Zeichnen Sie den Grafen des Frequenzganges $H(\omega)$ des Tiefpassfilters inklusive Gewichtung.
   g) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten $Y(\omega)$ der Funktion $y(t)$.
   Stellen Sie dabei fest, dass $Y(\omega) \neq X(\omega)$ und somit $y(t) \neq x(t)$ gilt.

Verschiedene Funktionen → gleiche Abtastfunktion

5. Gegeben ist das Fourier-Transformiertenpaar

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\frac{\sin(t)}{t} & (t \neq 0) \\ \frac{1}{\pi} & (t = 0) \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| < 1) \\ 0 & (|\omega| > 1) \end{cases} \qquad (\textit{Meyer}, \text{ Tabelle Seite 51})$$

Tastet man $x(t)$ mit der Abtastperiode T bzw. mit der Abtastfrequenz $\omega_a := 2\pi/T$ ab, wobei das Abtasttheorem erfüllt sein soll, so erhält man die Abtastfunktion $x_a(t)$.

   a) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten $X(\omega)$ der Funktion $x(t)$.
   b) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten $X_a(\omega)$ der abgetasteten Funktion $x_a(t)$.

Es gibt unendlich viele andere, von x(t) unterschiedliche Funktionen, die auf die gleiche Abtastfunktion $x_a(t)$ führen, wenn man sie mit der gleichen Periode abtastet wie x(t).

c) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten Y(ω) einer solchen Funktion y(t).
Betrachten Sie also den in b) gezeichneten Grafen von $X_a(\omega)$, und finden Sie daraus den Grafen einer Fourier-Transformierten Y(ω), so dass $Y_a(\omega) = X_a(\omega)$.

d) Überlegen Sie sich, dass bei der Abtastung der unter c) betrachteten Funktion y(t) das Abtasttheorem nicht erfüllt ist.

Ideale Abtastung ↔ Reale Abtastung

6. Studieren Sie im Buch *Meyer* den Abschnitt *5.2.6 Die Rekonstruktion von abgetasteten Signalen* (Seite 144 bis *"... zusehends gedämpft werden, Bild 5.2.-4."*).
Lösen Sie zum besseren Verständnis gleichzeitig die folgende Aufgabe 7.

7. Die **ideale** Abtastung einer zeitkontinuierlichen Funktion x(t) besteht darin, dass x(t) mit einer Dirac'schen Deltafunktionen-Folge multipliziert wird. Man erhält so die Abtastfunktion

$$x_a(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot\delta(t-nT) \qquad (\textit{Meyer}, (5.2.-2), \text{Seite } 136)$$

In der Praxis ist eine ideale Abtastung unmöglich, da die Dirac'sche Deltafunktion δ(t) nicht real existiert. δ(t) kann jedoch angenähert werden durch die Rechtecksfunktion $r_\tau(t)$:

$$r_\tau(t) := \begin{cases} \frac{1}{\tau} & \left(|t|<\frac{\tau}{2}\right) \\ 0 & \left(|t|>\frac{\tau}{2}\right) \end{cases}$$

Je kleiner τ ist, desto besser wird δ(t) durch $r_\tau(t)$ angenähert.

Im Gegensatz zur idealen Abtastung besteht nun die **reale** Abtastung einer zeitkontinuierlichen Funktion x(t) darin, dass man x(t) mit einer Rechtecksfunktionen-Folge statt mit einer Deltafunktionen-Folge abtastet.
Man erhält so die Abtastfunktion

$$x_{ra}(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot r_\tau(t-nT) \qquad (\textit{Meyer}, \text{Seite } 144)$$

Gegeben ist nun die abzutastende Funktion x(t) und deren Fourier-Transformierte X(ω):

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin(t)}{t} & (t\neq 0) \\ \frac{1}{\pi} & (t=0) \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega|<1) \\ 0 & (|\omega|>1) \end{cases} \qquad (\text{vgl. Aufgabe 5})$$

a) Zeichnen Sie den Grafen der Funktion x(t).

b) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten X(ω) von x(t).

Nun wird die Funktion x(t) mit Hilfe der Rechtecksfunktionen-Folge abgetastet.

c) Zeichnen Sie den Grafen einer einzelnen Rechtecksfunktion $r_\tau(t)$.

d) Zeichnen Sie den Grafen der Rechtecksfunktionen-Folge

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r_\tau(t-nT)$$

e) Zeichnen Sie den Grafen der Abtastfunktion $x_{ra}(t)$.

f) Bestimmen Sie, wie gross die Abtastperiode T maximal sein darf, damit das Abtasttheorem erfüllt ist, und wie gross die Breite τ der Rechtecke maximal sein darf, damit eine sinnvolle Abtastung mit einer Rechtecksfunktionen-Folge überhaupt möglich ist.
Drücken Sie die beiden Bedingungen in Form einer Kette von Ungleichungen aus.

g) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten $R_\tau(\omega)$ der Rechtecksfunktion $r_\tau(t)$.

Die Breite τ der Rechtecke wird nun gleich der Abtastperiode T gesetzt, d.h. τ:=T.

h) Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte $X_{ra}(\omega)$ der Abtastfunktion $x_{ra}(t)$ gegeben ist durch

$$X_{ra}(\omega) = R_T(\omega)\cdot X_a(\omega) \qquad (\textit{Meyer}, (5.2.-10), \text{Seite } 144)$$

i) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten $X_{ra}(\omega)$ der Abtastfunktion $x_{ra}(t)$.
Gehen Sie dabei von den Grafen von $R_T(\omega)$ und $X_a(\omega)$ aus (Aufgaben 7g bzw. 5).

Nun wird die Abtastfunktion $x_{ra}(t)$ gefiltert mit einem idealen Tiefpassfilter mit der Grenzfrequenz $\omega_a/2$ und gewichtet mit dem Faktor T. Man erhält so die Funktion y(t). Da die Abtastung nicht ideal war, ist y(t) nicht exakt gleich der ursprünglichen Funktion x(t).

j) Zeichnen Sie den Grafen der Fourier-Transformierten $Y(\omega)$ der Funktion y(t).

k) Vergleichen Sie $Y(\omega)$ mit $X(\omega)$. Geben Sie an, wie stark die Frequenzanteile in y(t) gegenüber den Frequenzanteilen in x(t) auf Grund der nicht-idealen Abtastung maximal gedämpft wurden.

Lösungen

1. …
2. …
3. …
4. a) …
   b) …
   c) …
   d) …
5. a) …
   b) …
   c) …
   d) …
6. …
7. a) …
   b) …
   c) …
   d) …
   e) …
   f) $(T<\pi)$ $(\tau \le T)$ $\tau \le T < \pi$
   g) …
   h) …
   i) …
   j) …
   k) Maximale Dämpfung bei $\omega=1$:

$$X(1) = 1\ ,\ Y(1) = \frac{\sin\left(\frac{T}{2}\right)}{\frac{T}{2}} > \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \qquad \left|\frac{Y(\omega)-X(\omega)}{X(\omega)}\right| < \left|\frac{Y(1)-X(1)}{X(1)}\right| = \frac{\pi-2}{\pi} \approx 0.36 = 36\%$$