Übung 28 Zeitdiskrete Funktionen Abtastperiode, Periodizität

Lernziele

- neue theoretische Sachverhalte erarbeiten können.
- verstehen, dass die Abtastung einer zeitkontinuierlichen, periodischen Funktion nicht notwendigerweise periodisch ist.
- verstehen, dass die Abtastung einer zeitkontinuierlichen Funktion mit verschiedenen Abtastperioden zu identischen zeitdiskreten Funktionen führen kann.
- die Periodizität einer zeitdiskreten Funktion beurteilen können.

Aufgaben

1. Die zeitdiskrete Funktion x[n] sei die Abtastung der zeitkontinuierlichen Sinus-Funktion $x(t) = \sin(\omega_0 t)$.
x(t) ist für jeden Wert von ω_0 ($\omega_0>0$) periodisch. Ob jedoch auch x[n] periodisch ist, hängt von der Abtastperiode T_A ab.

   a) Überlegen Sie sich, dass x(t) für jeden Wert von ω_0 periodisch ist.
   Geben Sie die Grundperiode T_0 von x(t) in Abhängigkeit von ω_0 an.

   b) Beurteilen Sie, welche Bedingung die Abtastperiode T_A erfüllen muss, damit auch x[n] periodisch ist.
   Drücken Sie diese Bedingung zuerst durch einen deutschen Satz aus und erst dann durch eine mathematische Formulierung.

   c) Beurteilen Sie, wie gross die Abtastperiode T_A sein muss, damit x[n] periodisch ist mit der Grundperiode N_0.
   Hinweis: Gehen Sie vom Resultat in b) aus.

   d) Überlegen Sie sich, dass die Resultate in b) und c) für jede beliebige zeitkontinuierliche, periodische Funktion x(t) gilt.

2. Gegeben ist eine zeitkontinuierliche, periodische Funktion x(t) mit der Grundperiode T_0.
x(t) soll nun mit verschiedenen Abtastperioden T_A abgetastet werden.
Tastet man x(t) mit der Abtastperiode T_{A1} ab, so erhält man die zeitdiskrete Funktion $x_1[n]$.
Tastet man x(t) mit der Abtastperiode T_{A2} ab, so erhält man die zeitdiskrete Funktion $x_2[n]$.
usw.
Im Allgemeinen erhält man bei verschiedenen Abtastperioden T_{A1} und T_{A2} auch verschiedene zeitdiskrete Funktionen $x_1[n]$ und $x_2[n]$.
Es ist jedoch möglich, dass zwei verschiedene Abtastperioden T_{A1} und T_{A2} zu zwei identischen zeitdiskreten Funktionen $x_1[n]$ und $x_2[n]$ führen, d.h. $x_1[n] \equiv x_2[n]$.
Finden Sie eine Beziehung zwischen T_{A1} und T_{A2}, damit $x_1[n] \equiv x_2[n]$ gilt.

3. Entscheiden Sie für die folgenden zeitdiskreten Funktionen, ob sie periodisch sind oder nicht.
Bestimmen Sie für die periodischen Funktionen die Grundperiode N_0.

   a) $x[n] = \sin\left(\frac{8\pi n}{7} + 2\right)$

   b) $x[n] = e^{j(n/8 - \pi)}$

   c) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right)$

   d) $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\delta[n-3m] - \delta[n-1-3m]\right)$

   e) $x[n] = \sin\left(\frac{n}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$

   f) $x[n] = 2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

Lösungen

1. a) $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

   b) x[n] ist genau dann periodisch, wenn ein ganzzahliges Vielfaches der Abtastperiode T_A ein ganzzahliges Vielfaches der Grundperiode T_0 ist.

   x[n] periodisch $\Leftrightarrow \quad m_1 \cdot T_A = m_2 \cdot T_0 \qquad m_1 \quad Z \qquad m_2 \quad Z$

   $\Leftrightarrow \quad \frac{T_A}{T_0} \quad Q$

   c) x[n] periodisch mit der Grundperiode N_0

   $\Leftrightarrow \quad T_A = m \frac{T_0}{N_0} \qquad m \quad Z$ beliebig $\qquad ggT(m,N_0) = 1$

   d) …

2. $T_{A2} = T_{A1} + k \cdot T_0 \quad (k \quad Z)$

3. a) $N_0 = 7$

   b) nicht periodisch

   c) $N_0 = 8$

   d) $N_0 = 3$

   e) nicht periodisch

   f) $N_0 = 16$