Übung 27 Zeitdiskrete Funktionen Einführung, Abtastung

Lernziele

- einige grundlegende Unterschiede zwischen zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Funktionen kennen.
- verstehen, dass das Abtasten einer zeitkontinuierlichen Funktion eine zeitvariante Operation ist.
- aus der Angabe einer zeitkontinuierlichen Funktion und einer Abtastperiode die dazugehörige zeitdiskrete Funktion bestimmen können und umgekehrt.
- zeitdiskrete Funktionen grafisch darstellen können.

Aufgaben

1. Im Unterschied zur zeitkontinuierlichen Deltafunktion $\delta(t)$ bestehen bei der Definition der zeitdiskreten Funktion $\delta[n]$ keine analytischen Schwierigkeiten.
   Erklären Sie in ein bis zwei Sätzen, was mit "analytischen Schwierigkeiten" gemeint ist.

2. Beurteilen Sie für zeitdiskrete Funktionen den Begriff **Stetigkeit**:
   Kann man bei zeitdiskreten Funktionen von Stetigkeits- und Unstetigkeitsstellen sprechen? Begründung!

3. a) Der Zusammenhang zwischen den **zeitkontinuierlichen** Funktionen $\varepsilon(t)$ und $\delta(t)$ ist gegeben durch

$$\delta(t) = \frac{d\varepsilon}{dt}(t) \qquad \text{bzw.} \qquad \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$

   Finden Sie die dazu analogen Formeln für den Zusammenhang zwischen den **zeitdiskreten** Funktionen $\varepsilon[n]$ und $\delta[n]$.

   b) Beurteilen Sie für zeitdiskrete Funktionen die Begriffe **Differenzieren** und **Integrieren**:
   i) Kann man diskrete Funktionen differenzieren und integrieren im Sinne der zeitkontinuierlichen Funktionen? Begründung!
   ii) Gibt es für zeitdiskrete Funktionen Operationen, die analog zur Differenziation und Integration sind? Wenn ja, welche?

4. Das Abtasten einer zeitkontinuierlichen Funktion ist eine zeitvariante Operation (*Meyer,* Seite 136 Mitte). Veranschaulichen Sie sich diesen Sachverhalt durch geeignete grafische Darstellungen am Beispiel einer Rechtecksfunktion.

5. Die zeitkontinuierliche Funktion x(t) wird mit der Abtastperiode T_A abgetastet, und man erhält die zeitdiskrete Funktion $x[n] = x(nT_A)$.
   Geben Sie die Funktionsgleichung von x[n] an, d.h. x[n] = ...

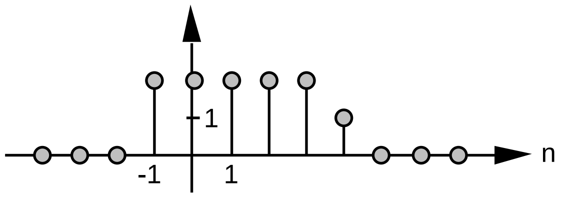
   a) $x(t) = \sin(t)$ $\qquad T_A = \frac{\pi}{2}$
   b) $x(t) = \sin(3t)$ $\qquad T_A = \frac{2\pi}{9}$
   c) $x(t) = \hat{x}\sin(\omega_0 t+\phi)$ $\qquad T_A$ beliebig
   d) $x(t) = 3\sin\left(4t - \frac{5\pi}{2}\right)$ $\qquad T_A = \frac{3\pi}{4}$
   e) $x(t) = \cos(5t)$ $\qquad T_A = \frac{2\pi}{5}$
   f) $x(t) = e^{-2t}\,\varepsilon(t)$ $\qquad T_A = 4$

6. Bearbeiten Sie für die gegebene zeitdiskrete Funktion x[n] die folgenden Teilaufgaben:

i) Zeichnen Sie den Grafen.
ii) Machen Sie je zwei Vorschläge für eine zeitkontinuierliche Funktion x(t) und eine Abtastperiode T_A, so dass die Abtastung von x(t) mit der Abtastperiode T_A gerade x[n] ergibt, d.h. $x[n] = x(nT_A)$.

a) $x[n] = \sin(\pi n)$
b) $x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)$
c) $x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{3} n\right)$

7. Die folgende Abbildung zeigt den Grafen der zeitdiskreten Funktion x[n]:



Zeichnen Sie die Grafen der folgenden Funktionen:

a) x[n-2]
b) x[4-n]
c) x[2n]
d) x[2n+1]
e) $x[n]\cdot\varepsilon[2-n]$
f) $x[n-1]\cdot\delta[n-3]$
g) $\frac{1}{2}\,x[n] + \frac{1}{2}\,(-1)^n\,x[n]$
h) $x[n^2]$

Lösungen

1. …

2. …

3. a) $\delta[n] = \varepsilon[n] - \varepsilon[n-1]$ bzw. $\varepsilon[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$

   b) …

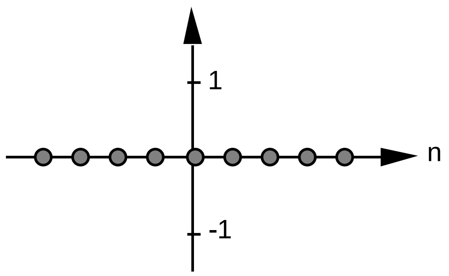
4. …

5. a) $x[n] = \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)$ b) $x[n] = \sin\left(n \frac{2\pi}{3}\right)$

   c) $x[n] = \hat{x} \sin(\omega_0 T_A n + \phi)$ d) $x[n] = 3 \sin\left((6n-5) \frac{\pi}{2}\right) = 3 (-1)^{n-1}$

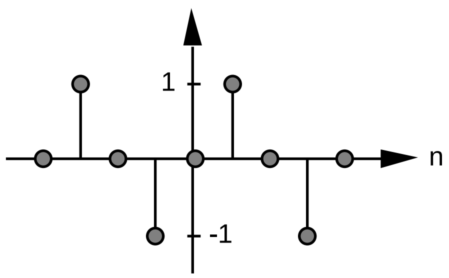
   e) $x[n] \equiv 1$ f) $x[n] = e^{-8n} \varepsilon[n]$

6. a) i)



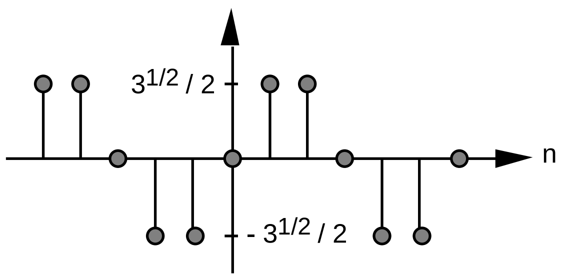
   ii) $x(t) = \sin(t)$, $T_A = \pi$ oder $x(t) = \sin(2t)$, $T_A = \frac{\pi}{2}$

   b) i)



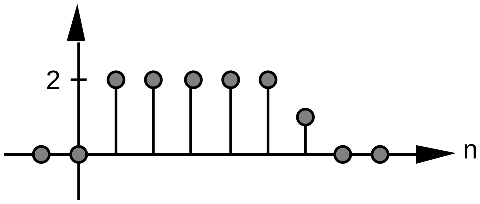
   ii) $x(t) = \sin(t)$, $T_A = \frac{\pi}{2}$ oder $x(t) = \sin(2t)$, $T_A = \frac{\pi}{4}$

   c) i)

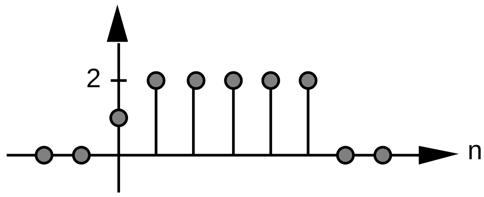


   ii) $x(t) = \sin(t)$, $T_A = \frac{\pi}{3}$ oder $x(t) = \sin(2t)$, $T_A = \frac{\pi}{6}$

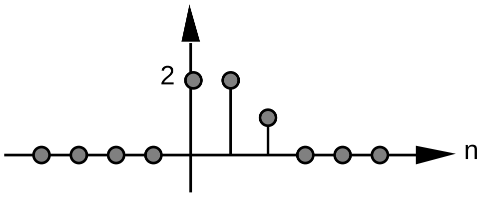
7. a)



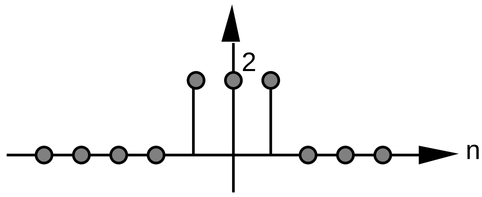
b)



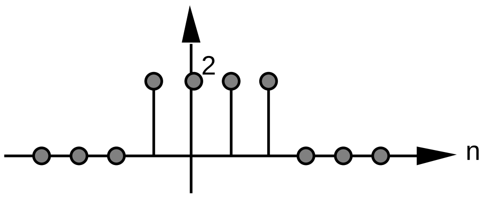
c)



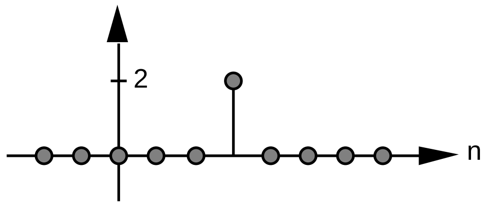
d)



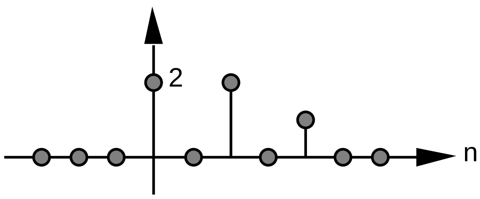
e)



f)



g)



h)