Übung 26 Laplace-Transformation Anwendungen bei LTI-Systemen

Lernziele

- verstehen, dass für ein LTI-System mit beliebiger Stossantwort gilt:
  Jedes komplexe exponentielle Signal ist eine Eigenfunktion des LTI-Systems.
- mit Hilfe der Faltungseigenschaft der Laplace-Transformation den Output eines LTI-Systems aus dem Input bestimmen können.
- die Übertragungsfunktion eines LTI-Systems aus einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten bestimmen können, welche den Input und den Output des LTI-Systems verknüpft.
- mit Hilfe der Übertragungsfunktion beurteilen können, ob ein kausales LTI-System stabil ist oder nicht.
- aus der Übertragungsfunktion den Frequenzgang eines LTI-Systems bestimmen können.

Aufgaben

1. In der Aufgabe 4 der Übung 20 haben Sie festgestellt, dass das Signal $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ eine Eigenfunktion eines LTI-Systems ist. Tatsächlich ist es so, dass sogar das Signal $x(t) = e^{s_0 t}$ für eine beliebige komplexe Zahl s_0, also nicht nur für $s_0 = j\omega_0$, eine Eigenfunktion eines LTI-Systems ist.

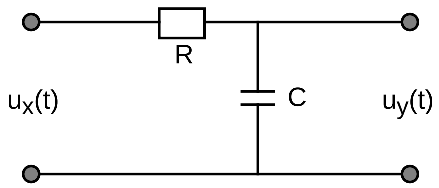
   Zeigen Sie, dass das Signal $x(t) = e^{s_0 t}$ (s_0 C) eine Eigenfunktion eines LTI-Systems ist.

   Anleitung:
   - Bestimmen Sie den Output $y(t)$ im Zeitbereich, d.h. $y(t) = h(t) * x(t)$.
   - Stellen Sie fest, dass $y(t) = H(s_0)\cdot x(t)$ gilt.

2. Betrachten Sie ein LTI-System mit dem Input $x(t) = e^{-t}\,\varepsilon(t)$ und der Stossantwort $h(t) = e^{-2t}\,\varepsilon(t)$.

   a) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierten von $x(t)$ und $h(t)$.
   b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Faltungseigenschaft die Laplace-Transformierte $Y(s)$ des Outputs $y(t)$.
   c) Bestimmen Sie $y(t)$ aus der in b) ermittelten Laplace-Transformierten von $y(t)$.
   d) Kontrollieren Sie das Ergebnis aus c), indem Sie $y(t)$ durch die Faltung von $x(t)$ und $h(t)$ bestimmen.

3. Gegeben ist ein System bestehend aus einem RC-Kreis (vgl. Übung 20, Aufgabe 7):



   Im Unterricht wurde gezeigt, dass der Input $u_x(t)$ und der Output $u_y(t)$ durch die folgende Differentialgleichung verknüpft sind:

$$RC\,\frac{du_y}{dt}(t) + u_y(t) = u_x(t)$$

   Es wird nun angenommen, dass das System ein kausales LTI-System sei.

   a) Bestimmen Sie den algebraischen Ausdruck für die Übertragungsfunktion $H(s)$ des LTI-Systems.
   b) Skizzieren Sie das zu $H(s)$ gehörige Pol-Nullstellen-Diagramm.
   c) Geben Sie den Konvergenzbereich von $H(s)$ an.
   d) Beurteilen Sie, ob das LTI-System stabil ist oder nicht.
   e) Bestimmen Sie die Stossantwort $h(t)$.
   f) Bestimmen Sie den zum Input $u_x(t) = \hat{u}_x \sin(\omega_0 t)$ gehörigen Output $u_y(t)$.

4. Ein kausales LTI-System sei beschrieben durch eine lineare Differentialgleichung, welche den Input x(t) und den dazugehörigen Output y(t) verknüpft.

Bearbeiten Sie je die folgenden Teilaufgaben:

i) Bestimmen Sie den algebraischen Ausdruck für die Übertragungsfunktion H(s) des LTI-Systems.
ii) Skizzieren Sie das zu H(s) gehörige Pol-Nullstellen-Diagramm.
iii) Geben Sie den Konvergenzbereich von H(s) an.
iv) Beurteilen Sie, ob das LTI-System stabil ist oder nicht.
v) Bestimmen Sie die Stossantwort h(t).
vi) Geben Sie den Frequenzgang H(jω) des LTI-Systems an.
vii) Beurteilen Sie, um welchen Faktor k die Amplitude eines sinus-förmigen Signals der Frequenz $\omega_0 := 1$ beim Durchgang durch das LTI-System vergrössert wird.

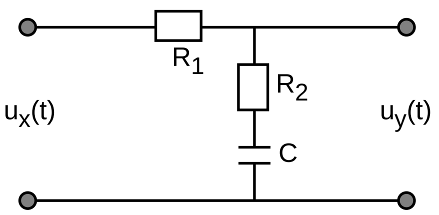
a) $\frac{dy}{dt}(t) + 3\, y(t) = x(t)$

b) $\frac{d^2y}{dt^2}(t) - \frac{dy}{dt}(t) - 2\, y(t) = x(t)$

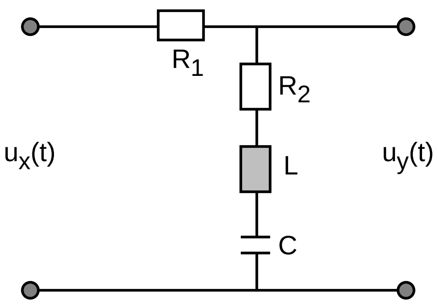
c) $\frac{d^2y}{dt^2}(t) + 4\, \frac{dy}{dt}(t) + 3\, y(t) = \frac{dx}{dt}(t) + 2\, x(t)$

5. * Bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen H(s) der folgenden LTI-Systeme:

a)



b)



Anleitung:
- Kirchhoff'sche Regeln
- $u_R = R \cdot i$, $u_C = \frac{1}{C} \cdot q$, $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$
- Ziel: $H(s) = \frac{U_y(s)}{U_x(s)}$ finden

Lösungen

1. …

2. a) $X(s) = \frac{1}{s+1}$, $Re(s)>-1$ $H(s) = \frac{1}{s+2}$, $Re(s)>-2$

   b) $Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$, $Re(s)>-1$

   c) $y(t) = (e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)$

   d) …

3. a) $H(s) = \frac{1}{RCs+1}$

   b) keine Nullstellen, Polstelle bei $s = -\frac{1}{RC}$

   c) $Re(s) > -\frac{1}{RC}$

   d) stabil

   e) $h(t) = \frac{1}{RC}\, e^{-(1/RC)t}\, \varepsilon(t)$

   f) $u_y(t) = |H(j\omega_0)|\, \hat{u}_x \sin\left(\omega_0 t + \arg\left(H(j\omega_0)\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(RC\omega_0\right)^2}} \sin\left(\omega_0 t - \arctan(RC\omega_0)\right)$

4. a) i) $H(s) = \frac{1}{s+3}$

   ii) keine Nullstellen, Polstelle bei $s = -3$

   iii) $Re(s) > -3$

   iv) stabil

   v) $h(t) = e^{-3t}\, \varepsilon(t)$

   vi) $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega+3}$

   vii) $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{9+\omega^2}}$ $k = |H(j\cdot 1)| = \frac{1}{\sqrt{10}}$

   b) i) $H(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)}$

   ii) keine Nullstellen, Polstellen bei $s_1 = -1$, $s_2 = 2$

   iii) $Re(s) > 2$

   iv) nicht stabil

   v) $H(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s-2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+1}$ $h(t) = \frac{1}{3}\,(e^{2t}-e^{-t})\, \varepsilon(t)$

   vi) $H(j\omega)$ existiert nicht

   vii) -

   c) i) $H(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3} = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$

   ii) Nullstelle bei $s = -2$, Polstellen bei $s_1 = -3$, $s_2 = -1$

   iii) $Re(s) > -1$

   iv) stabil

   v) $H(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+3}$ $h(t) = \frac{1}{2}\,(e^{-t}-e^{-3t})\, \varepsilon(t)$

   vi) $H(j\omega) = \frac{j\omega+2}{(j\omega+1)(j\omega+3)}$

   vii) $|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{4+\omega^2}{9+10\omega^2+\omega^4}}$ $k = |H(j\cdot 1)| = \frac{2}{3}$

5. * a) $H(s) = \frac{R_2Cs+1}{(R_1+R_2)Cs+1}$

   b) $H(s) = \frac{LCs^2+R_2Cs+1}{LCs^2+(R_1+R_2)Cs+1}$