Übung 25 Laplace-Transformation
Eigenschaften der Laplace-Transformation

Lernziele

- verstehen, dass die Laplace-Transformation die gleichen Eigenschaften besitzt wie die Fourier-Transformation.
- die Zeitverschiebungs-, Zeitskalierungs- und die Faltungseigenschaft der Laplace-Transformation kennen, verstehen und bei der Bestimmung der Laplace-Transformierten bzw. der Laplace-Rücktransformierten anwenden können.

Aufgaben

1. Die Laplace-Transformation LT ist eine Verallgemeinerung der Fourier-Transformation FT. Die LT besitzt daher Eigenschaften, die gleich sind wie die Eigenschaften der FT.

   In der nachstehenden Tabelle sollen die Eigenschaften der LT und der FT aufgelistet und gegenübergestellt werden. Ergänzen Sie dazu die leeren Felder der Tabelle.

Eigenschaft	Funktion	Laplace-Transformierte	Fourier-Transformierte
	$x(t)$	$X(s)$	$X(j\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	$X_1(j\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	$X_2(j\omega)$
Linearität	$k_1 \cdot x_1(t)+k_2 \cdot x_2(t)$	$k_1 \cdot X_1(s)+k_2 \cdot X_2(s)$	$k_1 \cdot X_1(j\omega)+k_2 \cdot X_2(j\omega)$
Zeitverschiebung	$x(t-t_0)$		
Skalierung	$x(at)$		
Faltung	$x_1(t)*x_2(t)$		
Modulation	$x_1(t)\cdot x_2(t)$	---	

Quellen:
- Unterrichtsnotizen zu den Eigenschaften der Fourier-Transformation
- Buch *Meyer* Abschnitt *2.3.5 Die Eigenschaften der Fourier-Transformation* (Seiten 40-49)
- Buch *Meyer* Abschnitt *3.4.3 Die Eigenschaften der Laplace-Transformation* (Seiten 56-58)

2. Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte X(s) der Funktion x(t) sowie den dazugehörigen Konvergenzbereich. Benützen Sie dazu lediglich die Transformationstabellen aus dem Buch *Meyer* (Seite 60) oder *Oppenheim/Willsky* (kopiertes Blatt) sowie die Eigenschaften der Laplace-Transformation.

   a) $x(t) = (3t)^5\ \varepsilon(t)$ b) $x(t) = e^{t-b}\ \varepsilon(t-b)$
   c) $x(t) = (t-4)^2\ \varepsilon(t-4)$ d) $x(t) = \sin(\omega t+\phi)\ \varepsilon(\omega t+\phi)\quad (\omega>0)$
   e) $x(t) = -5t^2\ \varepsilon(-t) + 4\ e^{-3t} \sin(2t)\ \varepsilon(t)$ f) $x(t) = (3t-2)^2\ \varepsilon(3t-2)$

3. Bestimmen Sie aus der Laplace-Transformierten X(s) die Originalfunktion x(t).
   Benützen Sie dazu lediglich die Transformationstabellen aus dem Buch *Meyer* (Seite 60) oder *Oppenheim/Willsky* (kopiertes Blatt) sowie die Eigenschaften der Laplace-Transformation.

   a) $X(s) = \dfrac{2e^{-2s}}{(s+3)^2}\quad \mathrm{Re}(s)>-3$ b) $X(s) = \dfrac{4s^2+6s+9\omega_1^2}{(s+2)(s^2+9\omega_1^2)}\quad \mathrm{Re}(s)>0$

Lösungen

1.

Eigenschaft	Funktion	Laplace-Transformierte	Fourier-Transformierte
	$x(t)$	$X(s)$	$X(j\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	$X_1(j\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	$X_2(j\omega)$
Linearität	$k_1 \cdot x_1(t)+k_2 \cdot x_2(t)$	$k_1 \cdot X_1(s)+k_2 \cdot X_2(s)$	$k_1 \cdot X_1(j\omega)+k_2 \cdot X_2(j\omega)$
Zeitverschiebung	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0}\, X(s)$	$e^{-j\omega t_0}\, X(j\omega)$
Skalierung	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(\frac{s}{a}\right)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} X\left(j\,\frac{\omega}{a}\right)$
Faltung	$x_1(t)*x_2(t)$	$X_1(s)\cdot X_2(s)$	$X_1(j\omega)\cdot X_2(j\omega)$
Modulation	$x_1(t)\cdot x_2(t)$	---	$\frac{1}{2\pi} X_1(j\omega)*X_2(j\omega)$

2. a) $X(s) = \frac{29160}{s^6}$ $\quad Re(s)>0$

b) $X(s) = \frac{e^{-bs}}{s-1}$ $\quad Re(s)>1$

c) $X(s) = \frac{2e^{-4s}}{s^3}$ $\quad Re(s)>0$

d) $X(s) = e^{s\phi/\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ $\quad Re(s)>0$

e) $X(s) = \frac{10}{s^3} + \frac{8}{s^2+6s+13}$ $\quad -3<Re(s)<0$

f) $X(s) = \frac{18e^{-(2/3)s}}{s^3}$ $\quad Re(s)>0$

3. a) $x(t) = (t-2)^2\, e^{-3(t-2)}\, \varepsilon(t-2)$

b) $x(t) = \left(e^{-2t} + \cos(3\omega_1 t)\right)\, \varepsilon(t)$