Übung 24 Laplace-Transformation
Bestimmung der Laplace-Transformierten / -Rücktransformierten

Lernziele

- die Laplace-Transformierte einer einfacheren Funktion von Hand und mit Hilfe von Integraltafeln bestimmen können.
- das Pol-Nullstellen-Diagramm einer Laplace-Transformierten skizzieren können.
- aus der Laplace-Transformierten einer Funktion deren Fourier-Transformierte bestimmen können.
- die zu einer Laplace-Transformierten gehörige Rücktransformierte mit Hilfe von Transformationstabellen und der Methode der Partialbruchzerlegung bestimmen können

Aufgaben

1. Lösen Sie für die gegebene Funktion x(t) die folgenden Teilaufgaben:

   i) Skizzieren Sie den Grafen von x(t)
   ii) Bestimmen Sie die zu x(t) gehörige Laplace-Transformierte X(s) von Hand und mit Hilfe von Integraltafeln.
   iii) Skizzieren Sie das zu X(s) gehörige Pol-Nullstellen-Diagramm.
   iv) Geben Sie die Fourier-Transformierte $X(j\omega)$ an, falls sie existiert.

   a) $x(t) = e^{-3t}\ \varepsilon(t)$

   b) $x(t) = e^{-3t}\ \varepsilon(-t)$

   c) $x(t) = e^{2t}\ \varepsilon(t)$

   d) $x(t) = e^{2t}\ \varepsilon(-t)$

   e) $x(t) = \varepsilon(t)$

   f) $x(t) = \delta(t-t_0)$

   g) $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k\ \delta(t-kT)$

   h) $x(t) = \cos(\omega_0 t+\phi)\ \varepsilon(t)$

2. Bestimmen Sie die zur Laplace-Transformierten X(s) gehörige Rücktransformierte x(t).
   Benützen Sie dazu Laplace-Transformationstabellen und die Methode der Partialbruchzerlegung.

   a) $X(s) = \frac{1}{s+1}$ $\quad$ Re(s) > -1

   b) $X(s) = \frac{1}{s+1}$ $\quad$ Re(s) < -1

   c) $X(s) = \frac{s}{s^2+4}$ $\quad$ Re(s) > 0

   d) $X(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$ $\quad$ Re(s) > -2

   e) $X(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$ $\quad$ Re(s) < -3

   f) $X(s) = \frac{s^2-s+2}{s^2(s-1)}$ $\quad$ 0 < Re(s) < 1

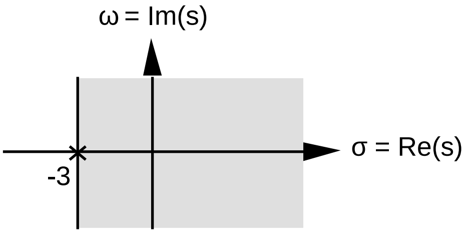
   g) $X(s) = \frac{s^2-s+1}{(s+1)^2}$ $\quad$ Re(s) > -1

Lösungen

1. a) i) …

ii) $X(s) = \frac{1}{s+3}$ Re(s) > -3

iii)

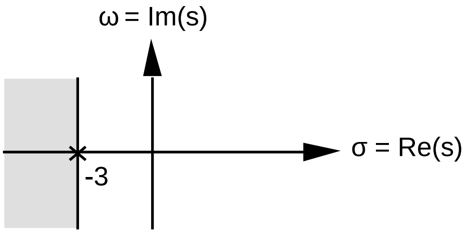


iv) $X(j\omega) = \frac{1}{j\omega+3}$

b) i) …

ii) $X(s) = -\frac{1}{s+3}$ Re(s) < -3

iii)

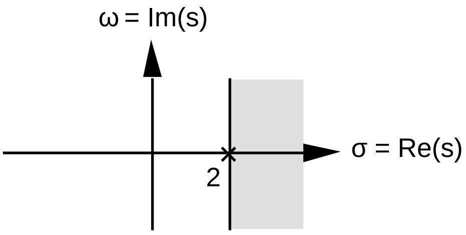


iv) X(jω) existiert nicht

c) i) …

ii) $X(s) = \frac{1}{s-2}$ Re(s) > 2

iii)

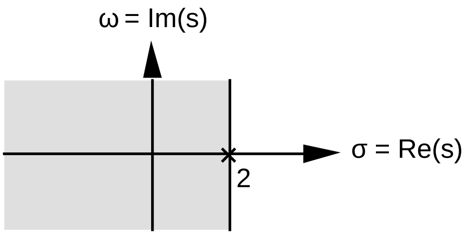


iv) X(jω) existiert nicht

d) i) …

ii) $X(s) = -\frac{1}{s-2}$ Re(s) < 2

iii)

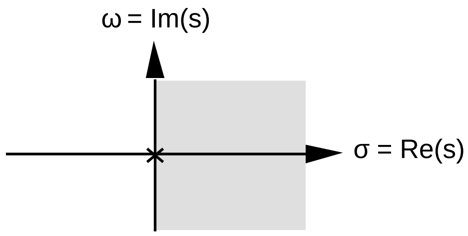


iv) $X(j\omega) = -\frac{1}{j\omega-2}$

e) i) …

ii) $X(s) = \frac{1}{s}$ Re(s) > 0

iii)

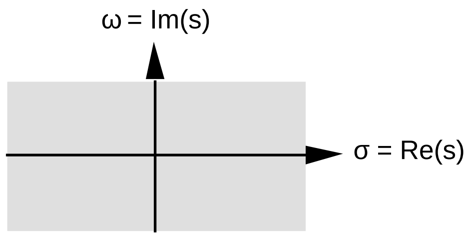


iv) $X(j\omega)$ existiert nicht

f) i) …

ii) $X(s) = e^{-st_0}$ alle s

iii)

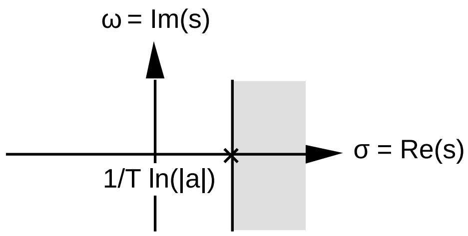


iv) $X(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$

g) i) …

ii) $X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (a \cdot e^{-sT})^k = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-sT}}$ $\quad$ $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{T} \ln(|a|)$

iii)

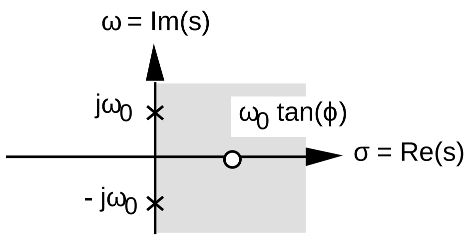


iv) $X(j\omega)$ existiert nicht

h) i) …

ii) $X(s) = \frac{s \cdot \cos(\phi) - \omega_0 \cdot \sin(\phi)}{s^2 + \omega_0^2}$ $\quad$ $\mathrm{Re}(s) > 0$

iii)



iv) $X(j\omega)$ existiert nicht

2. a) $x(t) = e^{-t}\,\varepsilon(t)$ b) $x(t) = -\,e^{-t}\,\varepsilon(-t)$

c) $x(t) = \cos(2t)\,\varepsilon(t)$ d) $x(t) = (2e^{-3t} - e^{-2t})\,\varepsilon(t)$

e) $x(t) = (-\,2e^{-3t} + e^{-2t})\,\varepsilon(-t)$ f) $x(t) = -\,2e^{t}\,\varepsilon(-t) - (2t+1)\,\varepsilon(t)$

g) $x(t) = \delta(t) + 3(t-1)e^{-t}\,\varepsilon(t)$