Übung 23 Laplace-Transformation
Einführung, Vergleich mit Fourier-Transformation, Linearität

Lernziele

- einen neuen Sachverhalt analysieren können.
- die Laplace-Transformierte einer einfacheren Funktion von Hand und mit Hilfe von Integraltafeln bestimmen können.
- verstehen, dass der algebraische Ausdruck allein die Laplace-Transformierte einer Funktion nicht vollständig beschreibt.
- Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen der Laplace- und der Fourier-Transformierten einer Funktion kennen.
- verstehen, dass die Laplace-Transformation eine lineare Abbildung ist.

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (t,a R und s C):

   a) $\lim\limits_{t \to 0} e^{-(s+a)t}$

   b) $\lim\limits_{t \to \infty} e^{-(s+a)t}$

   c) $\lim\limits_{t \to -\infty} e^{-(s+a)t}$

   Hinweise:
   - Beachten Sie, dass s eine komplexe Grössen ist.
   - Spalten Sie s in Real- und Imaginärteil auf, d.h. $s = \sigma + j\omega$.

2. Gegeben sind die beiden Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$:

   $x_1(t) = e^{-at}\,\varepsilon(t)$ (a R beliebig)
   $x_2(t) = -e^{-at}\,\varepsilon(-t)$ (a R beliebig)

   a) Skizzieren Sie die Grafen von $x_1(t)$ und $x_2(t)$ für die drei Fälle a>0, a=0, a<0.

   b) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $X_1(s)$ von $x_1(t)$.
   Gehen Sie von der Definition der Laplace-Transformation aus, und berechnen Sie das Integral von Hand. Benützen Sie dabei die Resultate aus der Aufgabe 1.

   c) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $X_2(s)$ von $x_2(t)$.
   Gehen Sie von der Definition der Laplace-Transformation aus, und berechnen Sie das Integral von Hand. Benützen Sie dabei die Resultate aus der Aufgabe 1.

   d) Vergleichen Sie die Laplace-Transformierten $X_1(s)$ und $X_2(s)$.
   Finden Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede.

   e) Welche Angaben sind nötig, um die Laplace-Transformierte einer Funktion vollständig zu beschreiben?

3. Gegeben ist die Funktion x(t):

   $x(t) = e^{-at}\,\varepsilon(t)$ (a R\{0})

   a) Geben Sie die Laplace-Transformierte X(s) von x(t) an (siehe Aufgabe 2a).

   b) Geben Sie die Fourier-Transformierte X(ω) von x(t) an (siehe Fourier-Transformations-Tabellen).
   Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle a>0 und a<0.

   c) Beurteilen Sie mit Hilfe der Resultate aus a) und b) die folgende Aussage:
   "Die Laplace-Transformierte existiert für eine grössere Klasse von Funktionen als die Fourier-Transformierte."

d) Sowohl die Fourier- als auch die Laplace-Transformierte von x(t) wird mit X bezeichnet, also $X(\omega)$ bzw. X(s).
Erklären Sie, warum es genau genommen falsch ist, für beide Transformierten die gleiche Bezeichnung X zu verwenden.

e) Vergleichen Sie die Laplace-Transformierte $LT(x(t))$ mit der Fourier-Transformierten $FT(x(t))$.
Versuchen Sie, ohne Hilfe eines Buches einen Zusammenhang zwischen $LT(x(t))$ und $FT(x(t))$ zu finden.

4. Beweisen Sie, dass die Laplace-Transformation LT eine lineare Abbildung ist.

5. Gegeben ist die Funktion x(t):

$$x(t) = e^{-t}\,\varepsilon(t) + e^{-2t}\,\varepsilon(t)$$

Bestimmen Sie von Hand die Laplace-Transformierte X(s) von x(t).
Benützen Sie dabei die Resultate aus den Aufgaben 2a und 4.

Lösungen

1. a) $\lim\limits_{t \to 0} e^{-(s+a)t} = 1$

b) $\lim\limits_{t \to \infty} e^{-(s+a)t} = \begin{cases} 0 & (\sigma+a>0) \\ 1 & (\sigma+a=0 \quad \omega=0) \\ \text{existiert nicht} & (\sigma+a=0 \quad \omega\neq 0 \quad \sigma+a<0) \end{cases}$

c) $\lim\limits_{t \to -\infty} e^{-(s+a)t} = \begin{cases} 0 & (\sigma+a<0) \\ 1 & (\sigma+a=0 \quad \omega=0) \\ \text{existiert nicht} & (\sigma+a=0 \quad \omega\neq 0 \quad \sigma+a>0) \end{cases}$

2. a) …

b) $X_1(s) = \begin{cases} \frac{1}{s+a} & (\mathrm{Re}(s)>-a) \\ \text{nicht definiert} & (\mathrm{Re}(s)\leq -a) \end{cases}$

c) $X_2(s) = \begin{cases} \frac{1}{s+a} & (\mathrm{Re}(s)<-a) \\ \text{nicht definiert} & (\mathrm{Re}(s)\geq -a) \end{cases}$

d) Gemeinsamkeit: Algebraischer Ausdruck
Unterschied: Konvergenzbereich, d.h. Angabe, für welche s die Laplace-Transformierte existiert

e) Algebraischer Ausdruck: X(s) = ...
Konvergenzbereich: Re(s) < ... bzw. Re(s) > ...

3. a) $X(s) = LT\big(x(t)\big) = \begin{cases} \frac{1}{s+a} & (\mathrm{Re}(s)>-a) \\ \text{nicht definiert} & (\mathrm{Re}(s)\leq -a) \end{cases}$

b) $X(\omega) = FT\big(x(t)\big) = \begin{cases} \frac{1}{j\omega+a} & (a>0) \\ \text{nicht definiert} & (a<0) \end{cases}$

c) Die Aussage ist richtig.
a>0: x(t) besitzt sowohl eine Laplace- als auch eine Fourier-Transformierte.
a<0: x(t) besitzt eine Laplace-, jedoch keine Fourier-Transformierte.

d) Die Funktion f: $\omega \to \frac{1}{j\omega+a}$ ist nicht die gleiche wie die Funktion g: $s \to \frac{1}{s+a}$
Die Funktion f besteht aus drei Operationen, die nacheinander ausgeführt werden:
- Multiplikation mit j
- Addition mit a
- Bildung des Kehrwertes

Die Funktion g besteht nur aus zwei Operationen:
- Addition mit a
- Bildung des Kehrwertes

e) $FT\big(x(t)\big) = \big[LT\big(x(t)\big)\big]_{s=j\omega}$

4. Der Beweis verläuft gleich wie der Beweis der Linearität der Fourier-Transformation FT:

$$\begin{aligned}
LT\big(\lambda_1\cdot x_1(t) + \lambda_2\cdot x_2(t)\big) &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(\lambda_1\cdot x_1(t) + \lambda_2\cdot x_2(t)\big)\, e^{-st}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1\cdot x_1(t)\cdot e^{-st}\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_2\cdot x_2(t)\cdot e^{-st}\, dt \\
&= \lambda_1\cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\cdot e^{-st}\, dt + \lambda_2\cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)\cdot e^{-st}\, dt \\
&= \lambda_1\cdot LT\big(x_1(t)\big) + \lambda_2\cdot LT\big(x_2(t)\big)
\end{aligned}$$

5. $X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} \qquad \mathrm{Re}(s) > -1 \qquad \mathrm{Re}(s) > -2$

$\quad\;\; = \frac{2s+3}{s^2+3s+2} \qquad \mathrm{Re}(s) > -1$