Übung 22 Repetition
Komplexe Zahlen, Fourier-Reihen, Fourier-Transformation

Aufgaben

1. *(Klausur 8.12.2000)*

Beurteilen Sie mit Begründung, ob die folgende Aussage für jede komplexe Zahl z wahr oder falsch ist:

$$| j \cdot z + z^* |^2 = 2 \cdot |z|^2 - 2 \cdot \mathrm{Im}(z^2)$$

2. *(Klausur 8.12.2000)*

Gegeben ist die Funktion

$$x: \quad R \quad \to \quad R$$
$$t \quad \to \quad x(t) = \frac{at^2+bt+c}{d \cdot \sin(et+f)}$$

a, b, c, d, e und f sind reelle Parameter, welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

- $\neg\,(a = 0 \quad b = 0 \quad c = 0)$
- $d \neq 0$
- $e \neq 0$

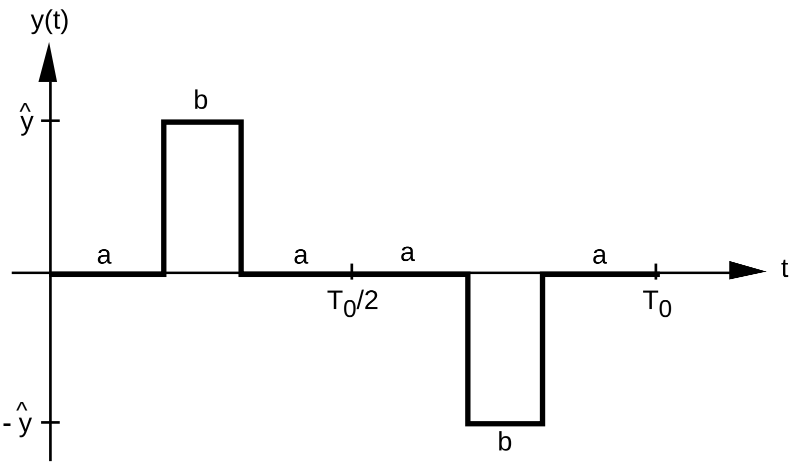
Bestimmen Sie die Werte der Parameter a, b, c, d, e und f, für welche die Funktion x

a) periodisch ist mit der Grundperiode $T_0 = 2$.

b) gerade ist.

3. *(Klausur 8.12.2000)*

In einem Formelbuch ist die folgende periodische Funktion y(t) und deren reelle Fourier-Reihe $FR(y(t))$ aufgeführt:



$$FR(y(t)) = \frac{4\hat{y}}{\pi}\left(\frac{\cos(\omega_0 a)}{1}\sin(\omega_0 t) + \frac{\cos(3\omega_0 a)}{3}\sin(3\omega_0 t) + \frac{\cos(5\omega_0 a)}{5}\sin(5\omega_0 t) + \dots\right)$$

wobei: $\omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$

T_0 = Grundperiode

(Aufgabenstellung auf Seite 2)

Prüfen Sie die Fourier-Reihe nach, indem Sie die Fourier-Koeffizienten b_k (= Koeffizienten der Sinus-Glieder) von Hand, d.h. ohne Taschenrechner, berechnen.

Auftretende Integrale müssen nicht auf Grundintegrale zurückgeführt werden, sondern Sie können dazu Integraltafeln verwenden.

4. *(Klausur 2.3.2001)*

Gegeben ist die folgende periodische Funktion x(t):

$$x(t) = 2 + \sin(9t) - 3\cos(6t)$$

Die Funktion kann sowohl in eine reelle als auch in eine komplexe Fourier-Reihe entwickelt werden:

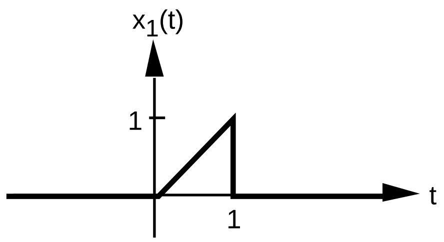
$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)\right)$$

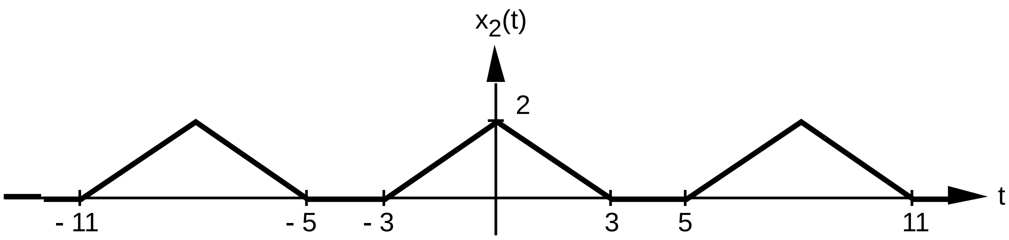
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

Bestimmen Sie alle reellen und komplexen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k, b_k und c_k der Funktion x(t).

5. *(Klausur 2.3.2001)*

Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktion $x_1(t)$ und der periodischen Funktion $x_2(t)$:





a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ der Funktion $x_1(t)$ von Hand.

Als Hilfsmittel sind nur eine Integrationstabelle erlaubt, jedoch keine Fourier-Transformations-Tabelle und kein Taschenrechner.

b) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k der Funktion $x_2(t)$ aus der Fourier-Transformierten $X_1(\omega)$ der Funktion $x_1(t)$.

Sie sollen also die Koeffizienten c_k weder von Grund auf berechnen noch eine Fourier-Reihen-Tabelle verwenden.

Benützen Sie jedoch die Kenntnis von $X_1(\omega)$ sowie die Eigenschaften der Fourier-Transformation.

Betrachten Sie $X_1(\omega)$ als bekannt, auch wenn Sie in der Augabe a) kein Resultat erhalten haben sollten. Der explizite Ausdruck für $X_1(\omega)$ ist unwesentlich, da Sie lediglich den Zusammenhang zwischen $X_1(\omega)$ und den Koeffizienten c_k aufzeigen sollen.