Übung 20 Fourier-Transformation Faltungseigenschaft

Lernziele

- die Faltungseigenschaft der Fourier-Transformation kennen und verstehen.
- die Faltungseigenschaft der Fourier-Transformation anwenden können.
- verstehen, warum man die Fourier-Transformierte der Stossantwort eines LTI-Systems als Frequenzgang bezeichnet.
- verstehen, dass die Reihenfolge zweier oder mehrerer hintereinander geschalteter LTI-Systeme keine Rolle spielt.
- verstehen, dass für ein LTI-System mit beliebiger Stossantwort gilt:
  Jedes komplexe exponentielle Signal ist eine Eigenfunktion des LTI-Systems.
- verstehen, dass für ein LTI-System mit reeller Stossantwort gilt:
  Bei einem sinusförmigen Input ist der Output wieder ein sinusförmiges Signal mit derselben Frequenz.
- bei einem LTI-System mit bekanntem Frequenzgang den Output zu einem sinusförmigen Input bestimmen können.
- verstehen, dass ein RC-Glied ein Tiefpassfilter ist.

Einleitung

Die Fourier-Transformation FT hat die folgende **Faltungseigenschaft** (ohne Beweis):

$$\mathrm{FT}\big(x_1(t) * x_2(t)\big) = \mathrm{FT}\big(x_1(t)\big) \cdot \mathrm{FT}\big(x_2(t)\big)$$

oder anders geschrieben:

$$x_1(t) * x_2(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

d.h. die Fourier-Transformierte der Faltung zweier Funktionen ist gleich dem Produkt der Fourier-Transformierten der einzelnen Funktionen.

Aufgaben

1. Prüfen Sie die Faltungseigenschaft der Fourier-Transformation am Beispiel des folgenden LTI-Systems nach:
   Stossantwort $h(t) = e^{-t}\,\varepsilon(t)$
   Input $x(t) = e^{-2t}\,\varepsilon(t)$

   Anleitung:
   i) Schlagen Sie in einer Tabelle die Fourier-Transformierte $H(\omega)$ von $h(t)$ nach.
   ii) Schlagen Sie in einer Tabelle die Fourier-Transformierte $X(\omega)$ von $x(t)$ nach.
   iii) Bestimmen Sie das Produkt $H(\omega)\cdot X(\omega)$.
   iv) Bestimmen Sie den Output $y(t)$, indem Sie $h(t)$ und $x(t)$ falten, d.h. $y(t) = h(t) * x(t)$.
   v) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $Y(\omega)$ von $y(t)$.
   Überzeugen Sie sich davon, dass das Resultat mit demjenigen aus iii) übereinstimmt, d.h. dass gilt:
   $Y(\omega) = H(\omega)\cdot X(\omega)$

2. Bei einem LTI-System erhält man das Spektrum $Y(\omega)$ des Outputs $y(t)$, indem man das Spektrum $X(\omega)$ des Inputs $x(t)$ mit dem **Frequenzgang $H(\omega)$** des LTI-Systems multipliziert.

   a) Überlegen Sie sich aufgrund dieser Multiplikation, warum man $H(\omega)$ als "Frequenzgang" bezeichnet.

   b) Skizzieren Sie den Frequenzgang $H(\omega)$ eines idealen **Tiefpassfilters**.
   Ein ideales Tiefpassfilter ist ein LTI-System, welches alle Frequenzanteile bis zu einer bestimmten maximalen Frequenz durchlässt und alle Anteile höherer Frequenzen unterdrückt.

   c) Skizzieren Sie den Frequenzgang $H(\omega)$ eines idealen **Hochpassfilters**.
   Ein ideales Hochpassfilter ist ein LTI-System, welches alle Frequenzanteile ab einer bestimmten minimalen Frequenz durchlässt und alle Anteile tieferer Frequenzen unterdrückt.

   d) (Seite 2)

d) Skizzieren Sie den Frequenzgang $H(\omega)$ eines idealen **Bandpassfilters**.
Ein ideales Bandpassfilter ist ein LTI-System, welches alle Frequenzanteile zwischen einer minimalen und einer maximalen Frequenz durchlässt und alle Anteile unterdrückt, welche ausserhalb dieses Frequenzbandes liegen.

3. Gegeben sind zwei beliebige LTI-Systeme mit den Stossantworten $h_1(t)$ und $h_2(t)$ bzw. den Frequenzgängen $H_1(\omega)$ und $H_2(\omega)$.
Schaltet man die beiden LTI-Systeme hintereinander, so ergibt sich gesamthaft ein neues LTI-System mit dem Frequenzgang $H(\omega)$.

a) Zeigen Sie, dass $H(\omega)$ gegeben ist durch $H(\omega) = H_1(\omega)\cdot H_2(\omega)$.

b) Erklären Sie mit Hilfe des Resultates aus a), dass der Frequenzgang $H(\omega)$ nicht von der Reihenfolge abhängt, in welcher man die beiden LTI-Systeme hintereinander schaltet.

4. Gegeben ist ein beliebiges LTI-System mit der **beliebigen** Stossantwort $h(t)$ bzw. dem Frequenzgang $H(\omega)$.
Bestimmen Sie den zum komplexen exponentiellen Input $\mathbf{x(t) = e^{j\omega_0 t}}$ gehörenden Output $y(t)$.
Stellen Sie dabei fest, dass $y(t)$ ein **Vielfaches** von $x(t)$ ist.

Def.: Einen Input $x(t)$, dessen zugehöriger Output $y(t)$ ein Vielfaches von $x(t)$ ist, bezeichnet man als **Eigenfunktion** des LTI-Systems.

Anleitung:

i) Schlagen Sie in einer Tabelle die Fourier-Transformierte $X(\omega)$ des Inputs $x(t)$ nach.

ii) Bestimmen Sie mit Hilfe der Faltungseigenschaft die Fourier-Transformierte $Y(\omega)$ des Outputs $y(t)$.

iii) Bestimmen Sie aus $Y(\omega)$ die Rücktransformierte $y(t)$.

5. Gegeben sind ein LTI-System mit einer **reellen** Stossantwort $h(t)$ sowie der sinusförmige Input
$\mathbf{x(t) = \hat{x}\,\sin(\omega_0 t + \phi)}$.
Bestimmen Sie den Output $y(t)$.
Zeigen Sie, dass $y(t)$ eine **sinusförmige** Funktion ist mit derselben Frequenz ω_0 wie der Input $x(t)$.

Anleitung:

i) Formen Sie $x(t)$ gemäss Euler in eine Summe komplexer exponentieller Funktionen um.

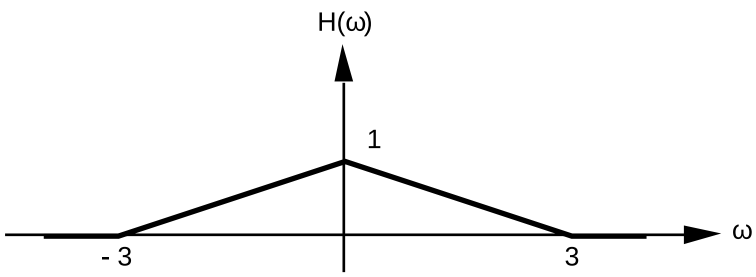
ii) Nützen Sie das Resultat aus der Aufgabe 4 sowie die Linearität des LTI-Systems, um den Output $y(t)$ zu bestimmen.

iii) Schreiben Sie den Frequenzgang $H(\omega)$ in der Polarform $H(\omega) = R(\omega)\, e^{j\varphi(\omega)}$

iv) Verwenden Sie, dass $R(\omega)$ eine gerade und $\varphi(\omega)$ eine ungerade Funktion ist.
Dies gilt nur unter der Voraussetzung, dass $h(t)$ reell ist (vgl. Übung 16).

v) Formen Sie $y(t)$ gemäss Euler in eine Sinus-Funktion um.

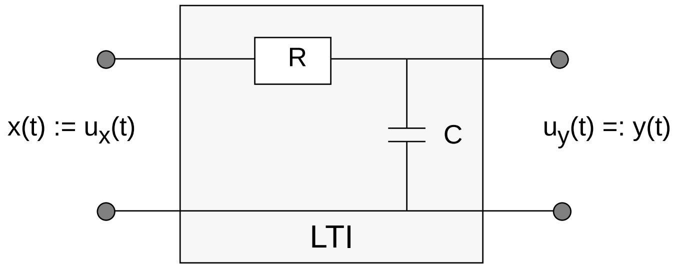
6. Gegeben ist der Graf des Frequenzganges $H(\omega)$ eines LTI-Systems:



Bestimmen Sie den Output $y(t)$ zum folgenden Input $x(t)$:

$x(t) = \sin(t) + \sin(2t) + \sin(3t) + \sin(4t)$

7. Bei der Einführung der Fourier-Reihen wurde im Unterricht das folgende LTI-System vorgeführt:



Der Frequenzgang H(ω) dieses LTI-Systems ist gegeben durch

$$H(\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega}$$

a) Bestimmen Sie den Betrag $|H(\omega)|$ des Frequenzganges H(ω).

b) Skizzieren Sie grob den Grafen von $|H(\omega)|$.

c) Erklären Sie anhand des in b) skizzierten Grafen, dass das LTI-System ein Tiefpassfilter ist.

d) Am System mit den Parameterwerten R = 1 kΩ und C = 100 nF werde der Input x(t) = sin(ωt) angelegt.
Bestimmen Sie die Grenzfrequenz $f_{max} = \omega_{max}/2\pi$, ab welcher die mittlere Leistung des Outputs y(t) nur noch die Hälfte der mittleren Leistung des Inputs beträgt.

Lösungen

1. i) $H(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$

ii) $X(\omega) = \frac{1}{2+j\omega}$

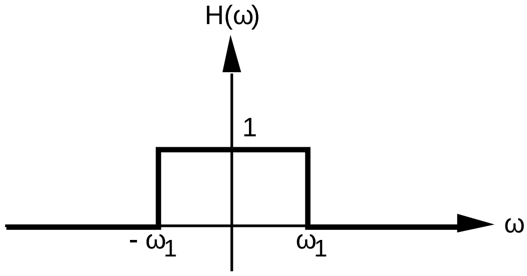
iii) $H(\omega)\cdot X(\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)}$

iv) $y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\,\varepsilon(t)$

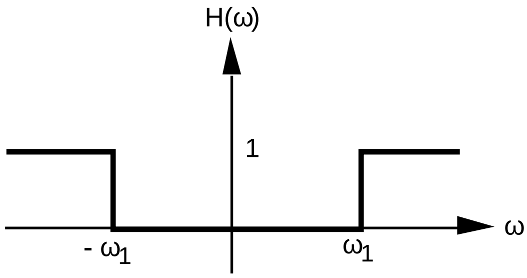
v) $Y(\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)} = H(\omega)\cdot X(\omega)$

2. a) $H(\omega_0)$, d.h. der Wert der Funktion $H(\omega)$ an der Stelle $\omega = \omega_0$, gibt an, inwiefern das LTI-System die Frequenz ω_0 im Input x(t) beeinflusst.
Die Funktion $H(\omega)$ drückt also das "Frequenzverhalten" des LTI-Systems aus.

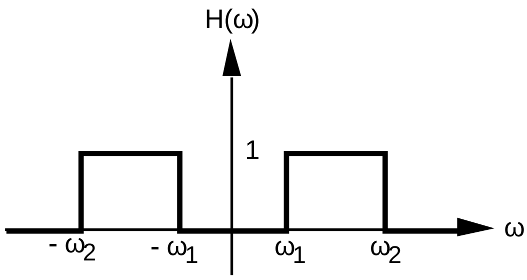
b)



c)



d)



3. a) x(t) := Input
y(t) := Output nach dem ersten LTI-System = Input vor dem zweiten LTI-System
z(t) := Output

$Z(\omega) = H_2(\omega)\cdot Y(\omega) = H_2(\omega)\cdot\big(H_1(\omega)\cdot X(\omega)\big) = \big(H_2(\omega)\cdot H_1(\omega)\big)\cdot X(\omega) \overset{!}{=} H(\omega)\cdot X(\omega)$

$H(\omega) = H_2(\omega)\cdot H_1(\omega) = H_1(\omega)\cdot H_2(\omega)$

b) Reihenfolge der Faktoren $H_1(\omega)$ und $H_2(\omega)$ in a) spielt keine Rolle

4. i) $X(\omega) = 2\pi\, \delta(\omega-\omega_0)$

ii) $Y(\omega) = H(\omega)\cdot X(\omega) = H(\omega)\, 2\pi\, \delta(\omega-\omega_0) = H(\omega_0)\, 2\pi\, \delta(\omega-\omega_0)$

iii) $\mathbf{y(t)} = H(\omega_0)\, e^{j\omega_0 t} = \mathbf{H(\omega_0)\; x(t)}$

5. i) $x(t) = \hat{x}\,\frac{1}{2j}\left(e^{j(\omega_0 t+\phi)} - e^{-j(\omega_0 t+\phi)}\right)$

$= \hat{x}\,\frac{1}{2j}\left(e^{j\phi}\, e^{j\omega_0 t} - e^{-j\phi}\, e^{-j\omega_0 t}\right)$

$= \hat{x}\,\frac{1}{2j}\, e^{j\phi}\, e^{j\omega_0 t} - \hat{x}\,\frac{1}{2j}\, e^{-j\phi}\, e^{-j\omega_0 t}$

ii) $y(t) = \hat{x}\,\frac{1}{2j}\, e^{j\phi}\, H(\omega_0)\, e^{j\omega_0 t} - \hat{x}\,\frac{1}{2j}\, e^{-j\phi}\, H(-\omega_0)\, e^{-j\omega_0 t}$

$= \hat{x}\,\frac{1}{2j}\left(H(\omega_0)\, e^{j(\omega_0 t+\phi)} - H(-\omega_0)\, e^{-j(\omega_0 t+\phi)}\right)$

iii) $y(t) = \hat{x}\,\frac{1}{2j}\left(R(\omega_0)\, e^{j\varphi(\omega_0)}\, e^{j(\omega_0 t+\phi)} - R(-\omega_0)\, e^{j\varphi(-\omega_0)}\, e^{-j(\omega_0 t+\phi)}\right)$

iv) $y(t) = \hat{x}\,\frac{1}{2j}\left(R(\omega_0)\, e^{j\varphi(\omega_0)}\, e^{j(\omega_0 t+\phi)} - R(\omega_0)\, e^{-j\varphi(\omega_0)}\, e^{-j(\omega_0 t+\phi)}\right)$

$= \hat{x}\, R(\omega_0)\,\frac{1}{2j}\left(e^{j(\omega_0 t+\phi+\varphi(\omega_0))} - e^{-j(\omega_0 t+\phi+\varphi(\omega_0))}\right)$

v) $\mathbf{y(t) = R(\omega_0)\; \hat{x}\; \sin\left(\omega_0 t+\phi+\varphi(\omega_0)\right)}$

6. $y(t) = \frac{2}{3}\sin(t) + \frac{1}{3}\sin(2t)$

7. a) $\left|H(\omega)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$

b) …

c) …

d) Mittlere Leistungen: $\frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} |y(t)|^2\, dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} |x(t)|^2\, dt\right)$

$\left(\hat{y}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\hat{x}\right)^2$

$\left|H(\omega_{max})\right|^2 = \dfrac{1}{1+\left(RC\omega_{max}\right)^2} = \frac{1}{2}$

$\omega_{max} = \frac{1}{RC} = 10^4\,\frac{1}{s}$

$f_{max} = \omega_{max}/2\pi = 1.6$ kHz