Übung 19 Fourier-Transformation Faltung

Lernziele

- wissen, wie die Faltung zweier Funktionen definiert ist.
- wissen, dass die Faltung das Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz erfüllt.
- sich das Faltungsintegral zweier Funktionen grafisch vorstellen können.
- die Faltung zweier einfacher Funktionen grafisch ausführen können.
- einen einfachen theoretischen Sachverhalt beweisen können.

Einleitung

Die Faltung zweier Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ ist wie folgt definiert:

$$x_1(t) * x_2(t) := \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\ x_2(t-\tau)\ d\tau$$

Die Faltung erfüllt die folgenden Rechengesetze:

Kommutativgesetz: $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$
Assoziativgesetz: $\left(x_1(t) * x_2(t)\right) * x_3(t) = x_1(t) * \left(x_2(t) * x_3(t)\right)$
Distributivgesetz: $x_1(t) * \left(x_2(t) + x_3(t)\right) = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$

Aufgaben

1. Veranschaulichen Sie sich das Faltungsintegral

$$x_1(t) * x_2(t) := \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\ x_2(t-\tau)\ d\tau$$

anhand der beiden konkreten Funktionen
$x_1(t) = e^{-at}\ \varepsilon(t)$ $(a>0)$
$x_2(t) = \varepsilon(t)$

Lösen Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

a) Skizzieren Sie die Grafen der folgenden Funktionen:
i) $\tau \rightarrow x_1(\tau)$
ii) $\tau \rightarrow x_2(\tau)$
iii) $\tau \rightarrow x_2(-\tau)$
iv) $\tau \rightarrow x_2(t-\tau)$
Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle t>0 und t<0.
v) $\tau \rightarrow x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)$
Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle t>0 und t<0.

b) Finden Sie mit Hilfe der Grafen aus a) eine geometrische Veranschaulichung des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\ x_2(t-\tau)\ d\tau$$

2. Die Funktion y(t) sei definiert als Faltung der beiden Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$:

$$y(t) := x_1(t) * x_2(t)$$

i) Skizzieren Sie die Grafen von $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

ii) Bestimmen Sie y(t) auf grafische Weise, d.h. nach dem in der Aufgabe 1 aufgezeigten grafischen Vorgehen.

iii) Skizzieren Sie den Grafen von y(t).

a) $$x_1(t) = x_2(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq 1) \\ 0 & (t<0 \quad t>1) \end{cases}$$

b) $$x_1(t) = \varepsilon(t)$$

$$x_2(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq 1) \\ 0 & (t<0 \quad t>1) \end{cases}$$

c) * $$x_1(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq 1) \\ -t+2 & (1 \leq t \leq 2) \\ 0 & (t<0 \quad t>2) \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq 2) \\ 0 & (t<0 \quad t>2) \end{cases}$$

3. Beweisen Sie das Kommutativgesetz der Faltung.

Hinweis:
Führen Sie im Faltungsintegral eine geeignete Substitution durch.

4. * Im Unterricht wurde gezeigt, dass die Faltung einer Funktion x(t) mit der Dirac'schen Delta-"Funktion" δ(t) die Funktion x(t) selbst ergibt:

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ \delta(t-\tau)\ d\tau = x(t)$$

Zeigen Sie, dass diese Aussage direkt aus der Ausblendeigenschaft der Dirac'schen Delta-"Funktion" δ(t) folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ \delta(t-t_0)\ dt = x(t_0)$$

Lösungen

1. a) …

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\; x_2(t-\tau)\; d\tau$

ist die Fläche zwischen dem Grafen der Funktion $\tau \to x_1(\tau)\cdot x_2(t-\tau)$ und der τ-Achse.

2. a) i) …

ii) $y(t) = \begin{cases} 0 & (t<0 \quad t>2) \\ t & (0 \le t \le 1) \\ -t+2 & (1 \le t \le 2) \end{cases}$

iii) …

b) i) …

ii) $y(t) = \begin{cases} 0 & (t<0) \\ \dfrac{t^2}{2} & (0 \le t \le 1) \\ \dfrac{1}{2} & (t>1) \end{cases}$

iii) …

c) * i) …

ii) $y(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2} & (0 \le t \le 1) \\ -\dfrac{t^2}{2} + 2t - 1 & (1 \le t \le 3) \\ \dfrac{t^2}{2} - 4t + 8 & (3 \le t \le 4) \\ 0 & (t<0 \quad t>4) \end{cases}$

iii) …

3. $x_1(t) * x_2(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\; x_2(t-\tau)\; d\tau$ | Substitution $s := t - \tau$

$= \displaystyle\int_{\infty}^{-\infty} x_1(t-s)\; x_2(s)\; (-ds)$

$= \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-s)\; x_2(s)\; ds$

$= \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x_2(s)\; x_1(t-s)\; ds$

$= x_2(t) * x_1(t)$

4. * $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\; \delta(t-t_0)\; dt = x(t_0)$ | Namensänderung $t_0 \to \tau$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\; \delta(t-\tau)\; dt = x(\tau)$ | Namensänderung $t \leftrightarrow \tau$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\; \delta(\tau-t)\; d\tau = x(t)$ | $\delta(\tau-t) = \delta(t-\tau)$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\; \delta(t-\tau)\; d\tau = x(t)$