

## Übung 18      **Fourier-Transformation Dualität**

Die Fourier-Transformation hat die folgende **Dualitätseigenschaft** (ohne Beweis):

$$g(t) \circ \bullet f(\omega) \qquad f(t) \circ \bullet 2 \cdot g(-\omega)$$

### Lernziele

- die Dualitätseigenschaft der Fourier-Transformation verstehen.
- die Dualitätseigenschaft der Fourier-Transformation anwenden können.

### Aufgaben

1. In dieser Aufgabe sollen Sie sich die Dualitätseigenschaft **veranschaulichen**, indem Sie die Funktionen  $g(t)$ ,  $f(\omega)$ ,  $f(t)$ ,  $2 \cdot g(-\omega)$  für ein konkretes Beispiel grafisch darstellen.

Betrachten Sie dazu das folgende Transformiertenpaar  $g(t) \circ \bullet f(\omega)$ :

$$g(t) = e^{-at} \quad (t \geq 0) \quad (a > 0) \quad \circ \bullet \quad f(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

- a) Skizzieren Sie den Grafen der Funktion  $g(t)$ .
- b) Skizzieren Sie die Grafen von  $|f(\omega)|$  und  $\arg(f(\omega))$ .
- c) Geben Sie die Funktionsgleichung der Funktion  $f(t)$  an, d.h.  $f(t) = \dots$
- d) Skizzieren Sie die Grafen von  $|f(t)|$  und  $\arg(f(t))$ .
- e) Geben Sie die Funktionsgleichung der Funktion  $2 \cdot g(-t)$  an, d.h.  $2 \cdot g(-t) = \dots$
- f) Skizzieren Sie den Grafen von  $2 \cdot g(-t)$ .

2. In dieser Aufgabe sollen Sie die Dualitätseigenschaft **anwenden**.

Betrachten Sie dazu das folgende Transformiertenpaar  $x_1(t) \circ \bullet X_1(\omega)$ :

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & (|t| < T_1) \\ 0 & (|t| > T_1) \end{cases} \quad \circ \bullet \quad X_1(\omega) = \begin{cases} \frac{2\sin(\omega T_1)}{2T_1} & (\omega \neq 0) \\ 1 & (\omega = 0) \end{cases}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Dualitätseigenschaft

- a) die Funktion  $x_2(t)$ , deren Fourier-Transformierte  $X_2(\omega)$  gegeben ist durch

$$X_2(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| < W) \\ 0 & (|\omega| > W) \end{cases}$$

- b) die Fourier-Transformierte  $X_3(\omega)$  der Funktion  $x_3(t)$ , die gegeben ist durch

$$x_3(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & (t \neq 0) \\ 1 & (t = 0) \end{cases}$$

## Lösungen

1. a) ...  
b) ...  
c)  $f(t) = \frac{1}{a+jt}$   
d) ...  
e)  $2 \cdot g(-) = 2 e^a (-)$   
f) ...
2. a)  $x_2(t) = \frac{\sin(Wt)}{W} (t \geq 0)$   
b)  $X_3(\omega) = \begin{cases} 0 & (|\omega| < 1) \\ 0 & (|\omega| > 1) \end{cases}$