Übung 17 Fourier-Transformation
Zeitverschiebung, Zeitskalierung

Lernziele

- einen neuen Sachverhalt erarbeiten können.
- grafisch beurteilen können, wie sich eine Zeitskalierung bei einer Funktion auf deren Fourier-Transformierte auswirkt.
- die Zeitverschiebungs- und die Zeitskalierungs-Eigenschaft der Fourier-Transformation bei der Bestimmung der Fourier-Transformierten anwenden.

Aufgaben

1. Gegeben sind die Grafen der Funktion $x(t)$ und deren Fourier-Transformierten $X(\omega)$:

Die Funktion $x_a(t)$ sei definiert durch $x_a(t) := x(at)$ (a R)

a) i) Skizzieren Sie auf einem Blatt nebeneinander die Grafen der Funktionen
$x_a(t)$ für $0<a<1$
$x(t)$
$x_a(t)$ für $a>1$

ii) Skizzieren Sie auf dem gleichen Blatt darunter die Grafen der dazugehörigen Fourier-Transformierten
$X_a(\omega)$ für $0<a<1$
$X(\omega)$
$X_a(\omega)$ für $a>1$

b) Im Zusammenhang mit der Fourier-Transformation wird auch von der "Inversen Beziehung zwischen Zeitbereich und Frequenzbereich" gesprochen.
Betrachten Sie die Grafen aus der Aufgabe a). Versuchen Sie mit Hilfe dieser Grafen herauszufinden, was unter der "Inversen Beziehung zwischen Zeitbereich und Frequenzbereich" gemeint sein könnte.
Schreiben Sie das Ergebnis Ihrer Betrachtung in zwei bis drei Sätzen nieder.

2. Eine Funktion $x(t)$ hat eine Fourier-Transformierte $X(\omega)$, deren Betrag und Argument in der folgenden Grafik dargestellt sind:

Die Funktionen $x_a(t)$, $x_b(t)$, $x_c(t)$ und $x_d(t)$ haben Fourier-Transformierte $X_a(\omega)$, $X_b(\omega)$, $X_c(\omega)$ und $X_d(\omega)$, deren Beträge mit dem Betrag von $X(\omega)$ identisch sind. Die Argumente weichen jedoch voneinander ab, wie die folgende Grafik zeigt:

$\arg\big(X_a(\omega)\big)$ und $\arg\big(X_b(\omega)\big)$ werden durch Addition einer linearen Phase zu $\arg(X(\omega))$ gebildet.

$\arg\big(X_c(\omega)\big)$ entsteht durch Spiegelung von $\arg(X(\omega))$ an der ω-Achse.

$\arg\big(X_d(\omega)\big)$ erhält man durch eine Kombination von Spiegelung und Addition der linearen Phase.

Drücken Sie nun $x_a(t)$, $x_b(t)$, $x_c(t)$ und $x_d(t)$ durch $x(t)$ aus, indem Sie die Eigenschaften der Fourier-Transformation ausnützen.

Lösungen

1. a) …
   b) …

2. $X(\omega) = |X(\omega)|\, e^{j\varphi(\omega)}$
   a) $X_a(\omega) = |X(\omega)|\, e^{j[\varphi(\omega)-a\omega]} = |X(\omega)|\, e^{j\varphi(\omega)}e^{-ja\omega} = X(\omega)\, e^{-ja\omega}$ $x_a(t) = x(t-a)$
   b) $X_b(\omega) = |X(\omega)|\, e^{j[\varphi(\omega)+b\omega]} = |X(\omega)|\, e^{j\varphi(\omega)}e^{jb\omega} = X(\omega)\, e^{jb\omega}$ $x_b(t) = x(t+b)$
   c) $X_c(\omega) = |X(\omega)|\, e^{-j\varphi(\omega)} = X^*(\omega) = X(-\omega)$ $x_c(t) = x(-t)$
   d) $X_d(\omega) = |X(\omega)|\, e^{-j[\varphi(\omega)-d\omega]} = |X(\omega)|\, e^{-j\varphi(\omega)}e^{jd\omega} = X(-\omega)\, e^{jd\omega}$ $x_d(t) = x(-t-d)$