Übung 16 Fourier-Transformation Symmetrie

Lernziele

- wissen, dass die Fourier-Transformation Symmetrieeigenschaften besitzt.
- den Inhalt der in der Einleitung aufgeführten Symmetrieeigenschaften der Fourier-Transformation verstehen.

Einleitung

Die Fourier-Transformierte einer reellen Funktion x(t) besitzt die folgenden Symmetrieeigenschaften:

(1) $X(-\omega) = \left(X(\omega)\right)^*$

(2) $|X(\omega)|$ gerade
(3) $\arg\left(X(\omega)\right)$ ungerade

(4) $\mathrm{Re}\left(X(\omega)\right)$ gerade
(5) $\mathrm{Im}\left(X(\omega)\right)$ ungerade

(6) $\mathrm{FT}\left(x_g(t)\right) = \mathrm{Re}\left(X(\omega)\right)$
(7) $\mathrm{FT}\left(x_u(t)\right) = j\cdot\mathrm{Im}\left(X(\omega)\right)$
wobei: $x_g(t)$:= gerader Teil von x(t)
$x_u(t)$:= ungerader Teil von x(t)

(8) x(t) gerade X(ω) reell X(ω) gerade
(9) x(t) ungerade X(ω) rein imaginär X(ω) ungerade

Im Unterricht wurde die Symmetrieeigenschaft (1) bewiesen.

Aufgaben

1. Prüfen Sie die Symmetrieeigenschaften (1) bis (7) anhand der folgenden Funktion x(t) und ihrer Fourier-Transformierten $\mathrm{FT}\left(x(t)\right) = X(\omega)$ nach:

$$x(t) = e^{-at}\,\varepsilon(t) \quad (a>0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$$

2. Zeigen Sie, dass
   a) die Symmetrieeigenschaften (2) und (3) aus der Symmetrieeigenschaft (1) folgen.
   b) die Symmetrieeigenschaft (8) aus den Symmetrieeigenschaften (4) und (6) folgt.
   c) die Symmetrieeigenschaft (9) aus den Symmetrieeigenschaften (5) und (7) folgt.

Lösungen

1. (1) $X(-\omega) = \left(X(\omega)\right)^* = \dfrac{1}{a-j\omega}$

   (2) $|X(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$ gerade

   (3) $\arg\left(X(\omega)\right) = -\arctan\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$ ungerade

   (4) $\mathrm{Re}\left(X(\omega)\right) = \dfrac{a}{a^2+\omega^2}$ gerade

   (5) $\mathrm{Im}\left(X(\omega)\right) = -\dfrac{\omega}{a^2+\omega^2}$ ungerade

   (6) $x_g(t) = \dfrac{1}{2}\left(e^{-at}\varepsilon(t)+e^{at}\varepsilon(-t)\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{-at} & (t>0) \\ \dfrac{1}{2}e^{at} & (t<0) \end{cases}$ $\qquad \mathrm{FT}\left(x_g(t)\right) = \dfrac{a}{a^2+\omega^2} = \mathrm{Re}\left(X(\omega)\right)$

   (7) $x_u(t) = \dfrac{1}{2}\left(e^{-at}\varepsilon(t)-e^{at}\varepsilon(-t)\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{-at} & (t>0) \\ -\dfrac{1}{2}e^{at} & (t<0) \end{cases}$ $\qquad \mathrm{FT}\left(x_u(t)\right) = -j\dfrac{\omega}{a^2+\omega^2} = j\cdot\mathrm{Im}\left(X(\omega)\right)$

2. a) …
   b) …
   c) …