Übung 15 — Fourier-Transformation
Fourier-Transformierte einer periodischen Funktion

Lernziele

- die Fourier-Transformierte einer einfacheren periodischen Funktion von Hand und mit Hilfe von Integraltafeln bestimmen können.
- die Fourier-Transformierte einer periodischen Funktion grafisch darstellen können.

Aufgabe

Gegeben ist die periodische Funktion x(t).

i) Skizzieren Sie den Grafen von x(t).
ii) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) von x(t).
iii) Bestimmen Sie die zu x(t) gehörige Fourier-Transformierte X(ω) von Hand und mit Hilfe von Integraltafeln.
iv) Skizzieren Sie das Spektrum $\{c_k\}$ grafisch als Balkendiagramm.
v) Skizzieren Sie den Grafen von X(ω).

a) $x(t) = \cos(\omega_0 t)$

b) $x(t) = \begin{cases} 1 & \left(|t| < \frac{T_0}{4}\right) \\ 0 & \left(\frac{T_0}{4} < |t| < \frac{T_0}{2}\right) \end{cases}$, $x(t+T_0) = x(t)$

Bemerkung:
Die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k haben Sie bereits in der Übung 10 bestimmt und in der Übung 13 verwendet.

c) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$

Lösungen

a) i) …

ii) $c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k = -2,2) \\ 0 & (k \neq -2,2) \end{cases}$

iii) $X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, c_k\, \delta(\omega - k\omega_0) = \pi\, \delta(\omega+\omega_0) + \pi\, \delta(\omega-\omega_0)$

iv) …

v) …

b) i) …

ii) $c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k=0) \\ \frac{1}{k\pi} & (k = \ldots,-11,-7,-3,1,5,9,\ldots) \\ -\frac{1}{k\pi} & (k = \ldots,-9,-5,-1,3,7,11,\ldots) \\ 0 & (k \text{ gerade} \quad k\neq 0) \end{cases}$

iii) $X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, c_k\, \delta(\omega - k\omega_0)$

$$= \ldots - \frac{2}{7}\delta(\omega+7\omega_0) + \frac{2}{5}\delta(\omega+5\omega_0) - \frac{2}{3}\delta(\omega+3\omega_0) + 2\,\delta(\omega+\omega_0) + \pi\,\delta(\omega) + 2\,\delta(\omega-\omega_0)$$
$$- \frac{2}{3}\delta(\omega-3\omega_0) + \frac{2}{5}\delta(\omega-5\omega_0) - \frac{2}{7}\delta(\omega-7\omega_0) + \ldots$$

iv) …

v) …

c) i) …

ii) $c_k = \frac{1}{T}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$

iii) $X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, c_k\, \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\,\frac{2\pi}{T}\right)$

$$= \ldots + \frac{2\pi}{T}\delta\left(\omega + \frac{6\pi}{T}\right) + \frac{2\pi}{T}\delta\left(\omega + \frac{4\pi}{T}\right) + \frac{2\pi}{T}\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right) + \frac{2\pi}{T}\delta(\omega) + \frac{2\pi}{T}\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right)$$
$$+ \frac{2\pi}{T}\delta\left(\omega - \frac{4\pi}{T}\right) + \frac{2\pi}{T}\delta\left(\omega - \frac{6\pi}{T}\right) + \ldots$$

iv) …

v) …