Übung 14 Fourier-Transformation
Dirac'sche δ-"Funktion"

Lernziele

- einfachere Beziehungen beweisen können.
- die Ausblendeigenschaft des Diracstosses verstehen.
- die Beziehungen zwischen der Sprungfunktion und dem Diracstoss kennen.
- wissen, wie man mit der Dirac'schen δ-"Funktion" rechnet, insbesondere, wenn sie als Faktor eines Integranden auftritt.
- die Fourier-Transformierte des Diracstosses auswendig kennen.

Aufgaben

1. Beweisen Sie die folgenden Beziehungen:
   a) $x(t)\cdot\delta(t-t_0) = x(t_0)\cdot\delta(t-t_0)$
   b) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ \delta(t-t_0)\ dt = x(t_0)$ (Ausblendeigenschaft des Diracstosses)

2. Überzeugen Sie sich davon, dass zwischen den Funktionen $\varepsilon(t)$ und $\delta(t)$ die folgenden Beziehungen gelten:
   a) $\delta(t) = \frac{d\varepsilon}{dt}(t)$
   b) $\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\ d\tau$

3. Beweisen Sie die folgende Beziehung:
   $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\,\delta(t) \quad (a\neq 0)$ (Zeitdehnung des Diracstosses)

   Hinweis:
   $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\,\delta(t)$ bedeutet:
   - Die Ausdrücke auf den beiden Seiten des Gleichheitszeichens sind an der gleichen Stelle t unbestimmt und an allen übrigen Stellen t gleich Null.
   - Die Integrale über die Ausdrücke auf den beiden Seiten des Gleichheitszeichens sind gleich gross, d.h. es gilt:

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|}\ \delta(t)\ dt$$

4. Berechnen Sie die folgenden Integrale:
   a) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(t)\cdot\delta(t)\ dt$
   b) $\int_{-\infty}^{\infty} 2\cdot\sin(2t)\cdot\delta\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\ dt$
   c) $\int_{-\infty}^{0} e^{-t}\cdot\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)\ dt$
   d) $\int_{-1}^{3} e^{-t}\cdot\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)\ dt$

5. a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte des Diracstosses $\delta(t)$.
   b) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte der Rechtecksfunktion $\delta_\Delta(t)$.
   c) Für $\Delta \to 0$ strebt die Rechtecksfunktion $\delta_\Delta(t)$ gegen den Diracstoss $\delta(t)$.
   Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte der Rechtecksfunktion $\delta_\Delta(t)$ für $\Delta \to 0$ gegen die Fourier-Transformierte des Diracstosses $\delta(t)$ strebt.

Lösungen

1. a) $x(t)\cdot\delta(t-t_0) = \begin{cases} x(t_0)\cdot\delta(0) & (t=t_0) \\ 0 & (t\neq t_0) \end{cases} = x(t_0)\cdot\delta(t-t_0)$

   b) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ \delta(t-t_0)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\ \delta(t-t_0)\ dt = x(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\ dt = x(t_0)\cdot 1 = x(t_0)$

2. a) …

   b) …

3. Substitution $\tau := at$ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\ dt = \int_{\dots}^{\dots} \delta(\tau)\cdot\dots\ d\tau = \dots = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|}\ \delta(t)\ dt$

4. a) 0

   b) 2

   c) 0

   d) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

5. a) $FT\left(\delta(t)\right) = 1$

   b) $FT\left(\delta_\Delta(t)\right) = \begin{cases} \frac{j}{\omega\Delta}\left(e^{-j\omega\Delta}-1\right) & (\omega\neq 0) \\ 1 & (\omega=0) \end{cases}$

   c) …