Übung 13 — Fourier-Transformation
Fourier-Koeffizienten als Abtastwerte der FT einer Grundperiode

Lernziel

- eine im Unterricht bewiesene Aussage an einem konkreten Beispiel nachprüfen können.

Aufgabe

Im Unterricht wurde die folgende Aussage bewiesen:

> Die Fourier-Koeffizienten c_k einer periodischen Funktion $\tilde{x}(t)$ mit der Grundperiode T_0 können aus Abtastwerten der Fourier-Transformierten $X(\omega)$ einer aperiodischen Funktion $x(t)$ gewonnen werden, welche über ein **beliebiges** Intervall der Länge T_0 gleich der periodischen Funktion $\tilde{x}(t)$ und ausserhalb dieses Intervalles gleich Null ist.
>
> $c_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0)$

Prüfen Sie diese Aussage, indem Sie für die untenstehenden Beispiele a) und b) die folgenden Teilaufgaben lösen:

i) Skizzieren Sie die Grafen der Funktionen $\tilde{x}(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$.

ii) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k $(k \quad Z)$ der Funktion $\tilde{x}(t)$ auf "herkömmliche" Weise, d.h. aus den reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k $(k \quad N)$, b_k $(k \quad N)$ oder direkt aus $\tilde{x}(t)$.

iii) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierten $X_1(\omega)$ und $X_2(\omega)$ der beiden Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

iv) Stellen Sie fest, dass gilt:
$c_k = \frac{1}{T_0} X_1(k\omega_0) = \frac{1}{T_0} X_2(k\omega_0)$

a) $\tilde{x}(t) = \begin{cases} 1 & \left(|t| < \frac{T_0}{4}\right) \\ 0 & \left(\frac{T_0}{4} < |t| < \frac{T_0}{2}\right) \end{cases}$, $\tilde{x}(t+T_0) = \tilde{x}(t)$

$x_1(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & \left(-\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}\right) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$

$x_2(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & (0<t<T_0) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$

Bemerkungen:
Die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k der Funktion $\tilde{x}(t)$ haben Sie bereits in der Übung 10 bestimmt.
Die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ von $x_1(t)$ haben Sie bereits in der Übung 12 bestimmt.

b) * $\tilde{x}(t) = \frac{\hat{x}}{T_0} t \quad (0<t<T_0)$, $\tilde{x}(t+T_0) = \tilde{x}(t)$

$x_1(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & (0<t<T_0) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$

$x_2(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & \left(\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}\right) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$

Lösungen

a) i) …

ii)
$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k=0) \\ \frac{1}{k\pi} & (k = \ldots,-11,-7,-3,1,5,9,\ldots) \\ -\frac{1}{k\pi} & (k = \ldots,-9,-5,-1,3,7,11,\ldots) \\ 0 & (k \text{ gerade} \quad k \neq 0) \end{cases}$$

iii)
$$X_1(\omega) = \begin{cases} \dfrac{2\sin\left(\omega\frac{T_0}{4}\right)}{\omega} & (\omega \neq 0) \\ \dfrac{T_0}{2} & (\omega = 0) \end{cases}$$

$$X_2(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{j\omega}\left(1 - e^{-j\omega T_0/4} + e^{-j\omega T_0}\left(e^{j\omega T_0/4} - 1\right)\right) & (\omega \neq 0) \\ \dfrac{T_0}{2} & (\omega = 0) \end{cases}$$

iv) …

b) * i) …

ii)
$$c_k = \begin{cases} j\,\dfrac{\hat{x}}{2k\pi} & (k \neq 0) \\ \dfrac{\hat{x}}{2} & (k = 0) \end{cases}$$

iii)
$$X_1(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\hat{x}}{T_0\omega^2}\left(e^{-j\omega T_0}\,(1 + j\omega T_0) - 1\right) & (\omega \neq 0) \\ \dfrac{\hat{x}}{2}\,T_0 & (\omega = 0) \end{cases}$$

$$X_2(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\hat{x}}{T_0\omega^2}\left(e^{-j\omega T_0/2}\left(j\omega\dfrac{T_0}{2} + 1\right) - e^{j\omega T_0/2}\left(-j\omega\dfrac{T_0}{2} + 1\right)\right) \\ \quad + j\,\dfrac{\hat{x}}{\omega}\left(1 - e^{j\omega T_0/2}\right) & (\omega \neq 0) \\ \dfrac{\hat{x}}{2}\,T_0 & (\omega = 0) \end{cases}$$

iv) …