Übung 11 Komplexe Fourier-Reihe
Parseval'sche Beziehung, "Negative Frequenzen"

Lernziele

- neue Sachverhalte analysieren können.
- mit Hilfe der Parseval'schen Beziehung mittlere Leistungen von einzelnen Fourier-Komponenten eines periodischen Signals bestimmen können.
- die Bedeutung der einzelnen Summanden in der komplexen Fourier-Reihe einer periodischen Funktion verstehen.

Aufgaben

1. Prüfen Sie die Parseval'sche Beziehung am Beispiel des folgenden periodischen Signals x(t) mit den komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \quad Z$) nach (vgl. Übung 10, Aufgabe 2a):

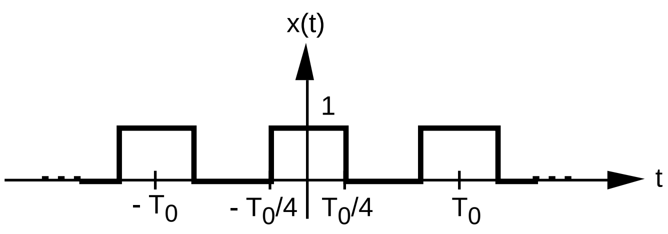
$$x(t) = \cos(4t) + \sin(8t)$$

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k = \pm 1) \\ -\frac{j}{2} & (k = 2) \\ \frac{j}{2} & (k = -2) \\ 0 & (k \neq \pm 1, \pm 2) \end{cases}$$

2. Gegeben ist das periodische Signal x(t) und seine reellen bzw. komplexen Fourier-Koeffizienten.

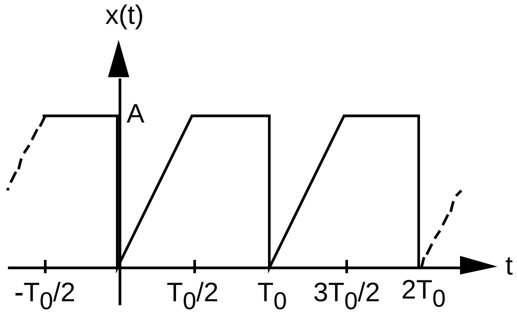
Bestimmen Sie die mittlere Leistung
i) des konstanten Anteils
ii) der Grundschwingung
im Verhältnis zur mittleren Leistung des ganzen Signals x(t).

a) x(t) aus Übung 10, Aufgabe 1a):



$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k=0) \\ \frac{1}{k\pi} & (k = \ldots,-11,-7,-3,1,5,9,\ldots) \\ -\frac{1}{k\pi} & (k = \ldots,-9,-5,-1,3,7,11,\ldots) \\ 0 & (k \text{ gerade} \quad k \neq 0) \end{cases}$$

b) x(t) aus Übung 10, Aufgabe 1c):



$$c_k = \begin{cases} \frac{3A}{4} & (k=0) \\ -\frac{A}{k^2\pi^2} + j\frac{A}{2k\pi} & (k\neq 0 \quad k \text{ ungerade}) \\ j\frac{A}{2k\pi} & (k\neq 0 \quad k \text{ gerade}) \end{cases}$$

3. Ein Studienkollege stellt Ihnen die folgende Frage:

"In der komplexen Fourier-Reihe hat es Summanden $c_1\, e^{j\omega_0 t}$, $c_2\, e^{j2\omega_0 t}$, $c_3\, e^{j3\omega_0 t}$, etc., die zu positiven Frequenzen ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0$, etc. gehören. Aber es hat auch Summanden $c_{-1}\, e^{-j\omega_0 t}$, $c_{-2}\, e^{-j2\omega_0 t}$, $c_{-3}\, e^{-j3\omega_0 t}$, welche zu negativen Frequenzen $-\omega_0$, $-2\omega_0$, $-3\omega_0$, etc. gehören. Ich verstehe, was eine positive Frequenz ist. Aber wie muss ich mir negative Frequenzen vorstellen?"

Geben Sie auf diese Frage eine korrekte und für Ihren Studienkollegen verständliche Antwort.

Lösungen

1. $$\frac{1}{T_0}\int_{(T_0)}|x(t)|^2\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{(\pi/2)}|\cos(4t)+\sin(8t)|^2\,dt = 1$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 = |c_1|^2 + |c_{-1}|^2 + |c_2|^2 + |c_{-2}|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

2. a) i) $$\frac{\overline{P}_0}{\overline{P}_{tot}} = \frac{|c_0|^2}{\frac{1}{T_0}\int_{(T_0)}|x(t)|^2\,dt} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = 0.500 = 50.0\ \%$$

ii) $$\frac{\overline{P}_1}{\overline{P}_{tot}} = \frac{|c_{-1}|^2 + |c_1|^2}{\frac{1}{T_0}\int_{(T_0)}|x(t)|^2\,dt} = \frac{\frac{2}{\pi^2}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\pi^2} = 0.405 = 40.5\ \%$$

b) i) $$\frac{\overline{P}_0}{\overline{P}_{tot}} = \frac{|c_0|^2}{\frac{1}{T_0}\int_{(T_0)}|x(t)|^2\,dt} = \frac{\frac{9A^2}{16}}{\frac{2A^2}{3}} = \frac{27}{32} = 0.843 = 84.3\ \%$$

ii) $$\frac{\overline{P}_1}{\overline{P}_{tot}} = \frac{|c_{-1}|^2 + |c_1|^2}{\frac{1}{T_0}\int_{(T_0)}|x(t)|^2\,dt} = \frac{\frac{A^2(4+\pi^2)}{2\pi^4}}{\frac{2A^2}{3}} = \frac{3(4+\pi^2)}{4\pi^4} = 0.107 = 10.7\ \%$$

3. …