Übung 10 Komplexe Fourier-Reihe
Komplexe Fourier-Koeffizienten, Reelle-Komplexe Fourier-Reihe

Lernziele

- neue Sachverhalte analysieren können.
- die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion in die komplexe Fourier-Reihe umformen können und umgekehrt.
- die komplexen Fourier-Reihe einer Funktion, die aus einer Linearkombination trigonometrischer Funktionen besteht, direkt bestimmen können.
- das Spektrum einer periodischen Funktion als Balkendiagramm grafisch darstellen können.
- die Bedeutung der einzelnen Summanden der Fourier-Reihe verstehen.

Aufgaben

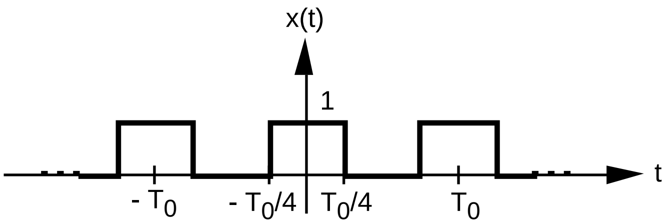
1. Gegeben ist die periodische Funktion x(t) und ihre reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k (k N) und b_k (k N).

   i) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k (k Z) aus den reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k (k N) und b_k (k N).

   ii) * Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k (k Z) direkt aus der Funktion x(t).

   iii) Schreiben Sie ein paar Glieder der komplexen Fourier-Reihe auf.

   a) x(t) aus Übung 5, Aufgabe 2:

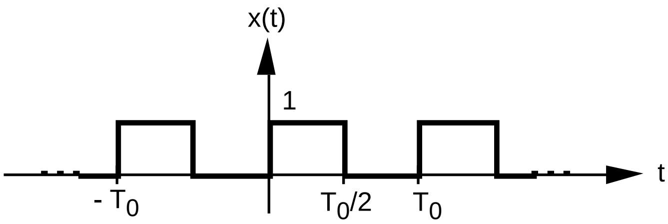


$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \begin{cases} \frac{2}{k\pi} & (k = 1,5,9,\ldots) \\ -\frac{2}{k\pi} & (k = 3,7,11,\ldots) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

$$b_k = 0$$

   b)

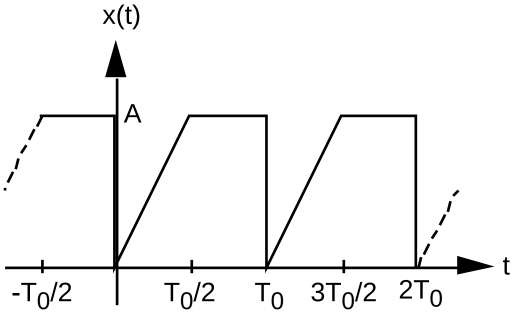


$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \begin{cases} \frac{2}{k\pi} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

c) x(t) aus Übung 5, Aufgabe 3:



$$a_0 = \frac{3A}{4}$$

$$a_k = \begin{cases} -\dfrac{2A}{k^2\pi^2} & \text{(k ungerade)} \\ 0 & \text{(k gerade)} \end{cases}$$

$$b_k = -\frac{A}{k\pi}$$

2. Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe der nachstehenden Funktionen x(t).
Lösen Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

- Bestimmen Sie T_0 und ω_0.
- Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten c_k (k Z).
- Stellen Sie das Spektrum $\{c_k\}$ der Funktion x(t) grafisch als Balkendiagramm dar.

a) $x(t) = \cos(4t) + \sin(8t)$
b) $x(t) = \cos(4t) + \sin(6t)$
c) $x(t) = \cos(4t) + \sin(\pi t)$
d) $x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right)$

3. Zeigen Sie, dass die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k (k Z) einer periodischen, **reellen** Funktion x(t) die folgenden Symmetrie-Eigenschaften besitzen:

a) $\left(c_{-k}\right)^* = c_k$
b) x(t) gerade c_k R
c) x(t) ungerade c_k rein imaginär
d) * $\left(|c_k| \text{ gerade in k}\right)$ $\left(\arg(c_k) \text{ ungerade in k}\right)$

Hinweise:
- Gehen Sie von der Definition der komplexen Fourier-Koeffizienten c_k (k Z) aus (siehe Theorie-Blätter "Komplexe Fourier-Reihe").
- Berücksichtigen Sie bei b) und c) die Eigenschaften der reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k (k N) und b_k (k N) einer geraden bzw. ungeraden Funktion.

4. (siehe Seite 3)

4. Eine periodische Funktion x(t) mit der Grundperiode T_0 und der Grundfrequenz $\omega_0 := 2\pi/T_0$ kann in eine reelle Fourier-Reihe (Sinus-/Cosinus- oder Betrags-/Phasen-Darstellung) oder in eine komplexe Fourier-Reihe entwickelt werden:

Reelle Fourier-Reihe in der Sinus-/Cosinus-Darstellung:

(1) $$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right)$$ (a_0, a_k, b_k R)

Reelle Fourier-Reihe in der Betrags-/Phasen-Darstellung:

(2) $$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \phi_k)$$ (a_0 R, $A_k \geq 0$, $0 \leq \phi_k < 2\pi$)

Komplexe Fourier-Reihe:

(3) $$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$ (c_k C)

a) Erstellen Sie eine Formelsammlung, die es Ihnen erlaubt, die drei Formen (1) bis (3) der Fourier-Reihe ineinander überzuführen. Dazu sind die folgenden Zusammenhänge zwischen den entsprechenden Fourier-Koeffizienten zu finden:

(1) ↔ (2) :	a_0, a_k (k N), b_k (k N)	→	a_0, A_k (k N), ϕ_k (k N)
	a_0, A_k (k N), ϕ_k (k N)	→	a_0, a_k (k N), b_k (k N)
(1) ↔ (3) :	a_0, a_k (k N), b_k (k N)	→	c_k (k Z)
	c_k (k Z)	→	a_0, a_k (k N), b_k (k N)
(2) ↔ (3) :	a_0, A_k (k N), ϕ_k (k N)	→	c_k (k Z)
	c_k (k Z)	→	a_0, A_k (k N), ϕ_k (k N)

Hinweise:
- Den Zusammenhang (1) ↔ (2) können Sie der Übung 9, Aufgabe 1 entnehmen.
- Der Zusammenhang (2) ↔ (3) folgt aus der Definition der komplexen Fourier-Koeffizienten c_k (k   Z).
- Der Zusammenhang (2) ↔ (3) ergibt sich aus den Zusammenhängen (1) ↔ (2) und (2) ↔ (3).

b) Vergleichen Sie die drei Formen (1), (2), (3) der Fourier-Reihe wie folgt:
Geben Sie an, welche Summanden sich in den Fourier-Reihen entsprechen, d.h. welche Summanden jeweils
- den konstanten Anteil
- die Grundschwingung bzw. die 1. Harmonische
- die 2. Harmonische
- die 3. Harmonische
- die 7. Harmonische
- die n. Harmonische

in der Fourier-Analyse der Funktion x(t) beschreiben.

Lösungen

1. a) i) $c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k=0) \\ \frac{1}{k\pi} & (k = \ldots,-11,-7,-3,1,5,9,\ldots) \\ -\frac{1}{k\pi} & (k = \ldots,-9,-5,-1,3,7,11,\ldots) \\ 0 & (k \text{ gerade} \quad k\neq 0) \end{cases}$

ii) * siehe i)

iii) $x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{\pi} e^{-j\omega_0 t} - \frac{1}{3\pi} e^{j3\omega_0 t} - \frac{1}{3\pi} e^{-j3\omega_0 t} + \frac{1}{5\pi} e^{j5\omega_0 t} + \frac{1}{5\pi} e^{-j5\omega_0 t} + \ldots$

b) i) $c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k=0) \\ -j\,\frac{1}{k\pi} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade} \quad k\neq 0) \end{cases}$

ii) * siehe i)

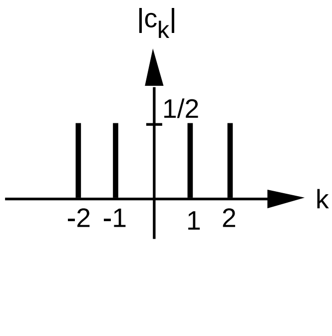
iii) $x(t) = \frac{1}{2} - j\,\frac{1}{\pi} e^{j\omega_0 t} + j\,\frac{1}{\pi} e^{-j\omega_0 t} - j\,\frac{1}{3\pi} e^{j3\omega_0 t} + j\,\frac{1}{3\pi} e^{-j3\omega_0 t} - j\,\frac{1}{5\pi} e^{j5\omega_0 t} + j\,\frac{1}{5\pi} e^{-j5\omega_0 t} - \ldots$

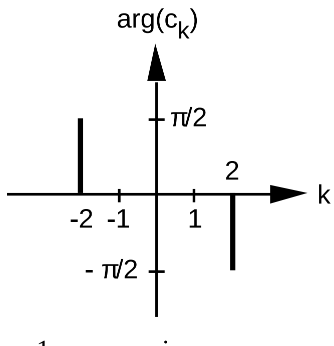
c) $c_k = \begin{cases} \frac{3A}{4} & (k=0) \\ -\frac{A}{k^2\pi^2} + j\,\frac{A}{2k\pi} & (k \text{ ungerade}) \\ j\,\frac{A}{2k\pi} & (k \text{ gerade} \quad k\neq 0) \end{cases}$

ii) * siehe i)

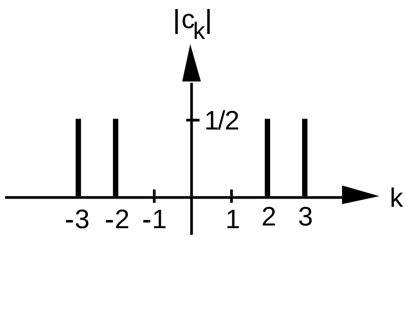
iii) $x(t) = \frac{3A}{4} + \left(-\frac{A}{\pi^2} + j\,\frac{A}{2\pi}\right) e^{j\omega_0 t} + \left(-\frac{A}{\pi^2} - j\,\frac{A}{2\pi}\right) e^{-j\omega_0 t} + j\,\frac{A}{4\pi} e^{j2\omega_0 t} - j\,\frac{A}{4\pi} e^{-j2\omega_0 t}$
$+ \left(-\frac{A}{9\pi^2} + j\,\frac{A}{6\pi}\right) e^{j3\omega_0 t} + \left(-\frac{A}{9\pi^2} - j\,\frac{A}{6\pi}\right) e^{-j3\omega_0 t} + j\,\frac{A}{8\pi} e^{j4\omega_0 t} - j\,\frac{A}{8\pi} e^{-j4\omega_0 t} + \ldots$

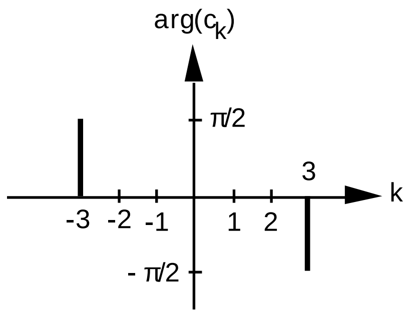
2. a) $T_0 = \frac{\pi}{2}$, $\omega_0 = 4$ $\qquad c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{j}{2}$, $c_{-2} = (c_2)^* = \frac{j}{2}$, $c_k = 0$ $(k\neq \pm 1, \pm 2)$





b) $T_0 = \pi$, $\omega_0 = 2$ $\qquad c_2 = c_{-2} = \frac{1}{2}$, $c_3 = -\frac{j}{2}$, $c_{-3} = (c_3)^* = \frac{j}{2}$, $c_k = 0$ $(k\neq \pm 2, \pm 3)$

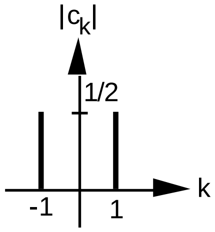


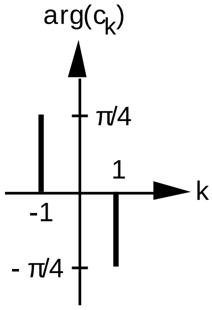


c) x(t) ist nicht periodisch und besitzt daher keine Fourier-Reihe.

d) $T_0 = 8\ ,\ \omega_0 = \frac{\pi}{4}$

$c_1 = \frac{1}{2} e^{-j\pi/4}\ ,\ c_{-1} = (c_1)^* = \frac{1}{2} e^{j\pi/4}\ ,\ c_k = 0\ (k \neq \pm 1)$





3.
$$c_k = \begin{cases} a_0 & (k=0) \\ \frac{1}{2}(a_k - jb_k) & (k>0) \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + jb_{-k}) & (k<0) \end{cases}$$

a)
$$c_{-k} = \left.\begin{cases} a_0 & (-k=0) \\ \frac{1}{2}(a_{-k} - jb_{-k}) & (-k>0) \\ \frac{1}{2}(a_k + jb_k) & (-k<0) \end{cases}\right\} = \begin{cases} a_0 & (k=0) \\ \frac{1}{2}(a_{-k} - jb_{-k}) & (k<0) \\ \frac{1}{2}(a_k + jb_k) & (k>0) \end{cases}$$

$$\left(c_{-k}\right)^* = \left.\begin{cases} a_0 & (k=0) \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + jb_{-k}) & (k<0) \\ \frac{1}{2}(a_k - jb_k) & (k>0) \end{cases}\right\} = c_k$$

b) x(t) gerade $b_k = 0\ (k \in \mathbb{Z})$

$$c_k = \left.\begin{cases} a_0 & (k=0) \\ \frac{1}{2} a_k & (k>0) \\ \frac{1}{2} a_{-k} & (k<0) \end{cases}\right\} \quad \mathbb{R}$$

c) x(t) ungerade $a_0 = 0 \quad a_k = 0\ (k \in \mathbb{Z})$

$$c_k = \left.\begin{cases} 0 & (k=0) \\ -j\frac{1}{2} b_k & (k>0) \\ j\frac{1}{2} b_{-k} & (k<0) \end{cases}\right\} \text{ rein imaginär}$$

d) * …

4. (siehe Seite 6)

4. a) (1) ↔ (2) : $a_0,\ a_k\ (k \in \mathbb{N}),\ b_k\ (k \in \mathbb{N}) \ \rightarrow\ a_0,\ A_k\ (k \in \mathbb{N}),\ \phi_k\ (k \in \mathbb{N})$

$$A_k = \sqrt{a_k{}^2 + b_k{}^2}$$

$$\phi_k = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) & (a_k>0) \\ -\frac{\pi}{2} & (a_k=0 \wedge b_k>0) \\ \frac{\pi}{2} & (a_k=0 \wedge b_k<0) \\ -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) + \pi & (a_k<0) \end{cases}$$

$a_0,\ A_k\ (k \in \mathbb{N}),\ \phi_k\ (k \in \mathbb{N}) \ \rightarrow\ a_0,\ a_k\ (k \in \mathbb{N}),\ b_k\ (k \in \mathbb{N})$

$$a_k = A_k \cos(\phi_k)$$
$$b_k = -A_k \sin(\phi_k)$$

(1) ↔ (2) : $a_0,\ a_k\ (k \in \mathbb{N}),\ b_k\ (k \in \mathbb{N}) \ \rightarrow\ c_k\ (k \in \mathbb{Z})$

$$c_k = \begin{cases} a_0 & (k=0) \\ \frac{1}{2}(a_k - jb_k) & (k>0) \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + jb_{-k}) & (k<0) \end{cases}$$

$c_k\ (k \in \mathbb{Z}) \ \rightarrow\ a_0,\ a_k\ (k \in \mathbb{N}),\ b_k\ (k \in \mathbb{N})$

$$a_0 = c_0$$
$$a_k = c_k + c_{-k}$$
$$b_k = j(c_k - c_{-k})$$

(2) ↔ (3) : $a_0,\ A_k\ (k \in \mathbb{N}),\ \phi_k\ (k \in \mathbb{N}) \ \rightarrow\ c_k\ (k \in \mathbb{Z})$

$$c_k = \begin{cases} a_0 & (k=0) \\ \frac{1}{2} A_k\, e^{j\phi_k} & (k>0) \\ \frac{1}{2} A_{-k}\, e^{-j\phi_{-k}} & (k<0) \end{cases}$$

$c_k\ (k \in \mathbb{Z}) \ \rightarrow\ a_0,\ A_k\ (k \in \mathbb{N}),\ \phi_k\ (k \in \mathbb{N})$

$$a_0 = c_0$$
$$A_k = 2\,|c_k|$$
$$\phi_k = \arg(c_k)$$

b)

	(1)	(2)	(3)
konstanter Anteil	a_0	a_0	c_0
Grundschwingung	$a_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + b_1 \cdot \sin(\omega_0 t)$	$A_1 \cdot \cos(\omega_0 t + \phi_1)$	$c_1 \cdot e^{j\omega_0 t} + c_{-1} \cdot e^{-j\omega_0 t}$
2. Harmonische	$a_2 \cdot \cos(2\omega_0 t) + b_2 \cdot \sin(2\omega_0 t)$	$A_2 \cdot \cos(2\omega_0 t + \phi_2)$	$c_2 \cdot e^{j2\omega_0 t} + c_{-2} \cdot e^{-j2\omega_0 t}$
3. Harmonische	$a_3 \cdot \cos(3\omega_0 t) + b_3 \cdot \sin(3\omega_0 t)$	$A_3 \cdot \cos(3\omega_0 t + \phi_3)$	$c_3 \cdot e^{j3\omega_0 t} + c_{-3} \cdot e^{-j3\omega_0 t}$
7. Harmonische	$a_7 \cdot \cos(7\omega_0 t) + b_7 \cdot \sin(7\omega_0 t)$	$A_7 \cdot \cos(7\omega_0 t + \phi_7)$	$c_7 \cdot e^{j7\omega_0 t} + c_{-4} \cdot e^{-j7\omega_0 t}$
n. Harmonische	$a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)$	$A_n \cdot \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$	$c_n \cdot e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} \cdot e^{-jn\omega_0 t}$