Übung 9 Reelle Fourier-Reihe
Betrags-/Phasen-Darstellung

Die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion x(t) mit der Grundperiode T_0 und der Grundfrequenz $\omega_0 := 2\pi/T_0$ kann sowohl in der Sinus-/Cosinus- als auch in der Betrags-/Phasen-Darstellung geschrieben werden:

Sinus-/Cosinus-Darstellung

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)\right) \qquad (a_0, a_k, b_k \;\; R)$$

Betrags-/Phasen-Darstellung

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \qquad (a_0 \;\; R,\ A_k \geq 0,\ 0 \leq \phi_k < 2\pi)$$

oder

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \sin(k\omega_0 t + \varphi_k) \qquad (a_0 \;\; R,\ B_k \geq 0,\ 0 \leq \varphi_k < 2\pi)$$

Lernziele

- neue Sachverhalte analysieren können.
- die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion von der Sinus-/Cosinus-Darstellung in die Betrags-/Phasen-Darstellung umformen können.
- verstehen, inwiefern sich bei einer zeitlichen Verschiebung einer periodischen Funktion deren reelle Fourier-Koeffizienten in der Betrags-/Phasen-Darstellung verändern.

Aufgaben

1. Im Unterricht wurde gezeigt, dass der Term $a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)$ geschrieben werden kann als reine Cosinus-Funktion:

$$a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) = A_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \phi_k)$$

wobei A_k und ϕ_k das folgende Gleichungssystem erfüllen müssen:

$$a_k = A_k \cdot \cos(\phi_k)$$
$$b_k = - A_k \cdot \sin(\phi_k)$$

Lösen Sie dieses Gleichungssystem nach A_k und ϕ_k auf, d.h. drücken Sie die Fourier-Koeffizienten (A_k,ϕ_k) der Betrags-/Phasen-Darstellung durch die Fourier-Koeffizienten (a_k,b_k) der Sinus-/Cosinus-Darstellung aus.

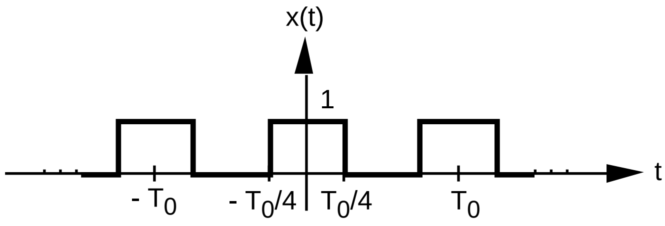
Hinweise:
- Fassen Sie a_k und $-b_k$ als kartesische Koordinaten eines Punktes P auf, d.h. $P(a_k|-b_k)$.
- Zeichnen Sie den Punkt P in ein zweidimensionales kartesisches Koordinatensystem ein.
- Zeigen Sie, dass A_k und ϕ_k gerade die Polarkoordinaten des Punktes P sind.
- Aus der Zeichnung können nun die gesuchten Beziehungen abgeleitet werden.

2. Gegeben ist die periodische Funktion x(t) und ihre reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k $(k \;\; N)$ und b_k $(k \;\; N)$.

   i) Bestimmen Sie die Koeffizienten A_k $(k \;\; N)$ und ϕ_k $(k \;\; N)$ mit Hilfe der in der Aufgabe 1 hergeleiteten Beziehungen.

   ii) Schreiben Sie die ersten paar Glieder der reellen Fourier-Reihe sowohl in der Sinus-/Cosinus- als auch in der Betrags-/Phasen-Darstellung auf.

a) x(t) aus Übung 5, Aufgabe 2:

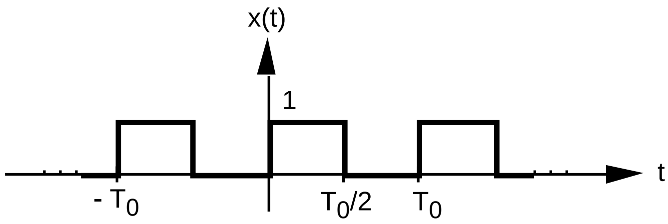


$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \begin{cases} \frac{2}{k\pi} & (k = 1,5,9,\ldots) \\ -\frac{2}{k\pi} & (k = 3,7,11,\ldots) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases} = \begin{cases} \frac{(-1)^{(k-1)/2}\,2}{k\pi} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

$$b_k = 0$$

b)

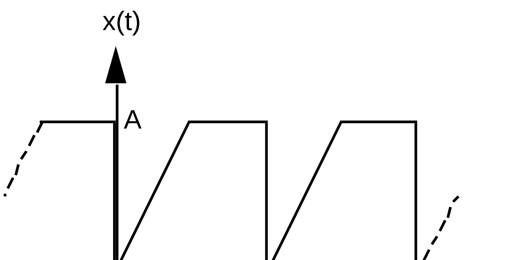


$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \begin{cases} \frac{2}{k\pi} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

c) x(t) aus Übung 5, Aufgabe 3:

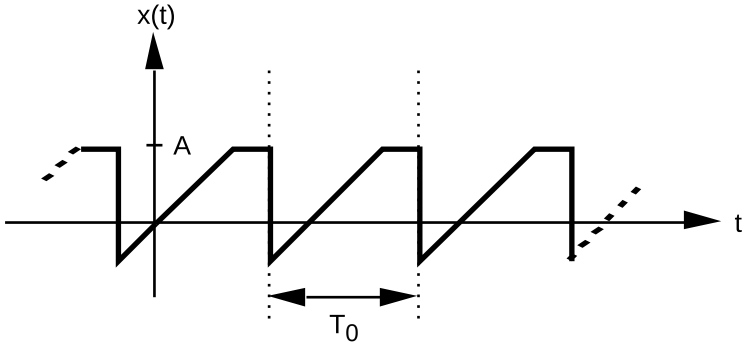


$$a_0 = \frac{3A}{4}$$

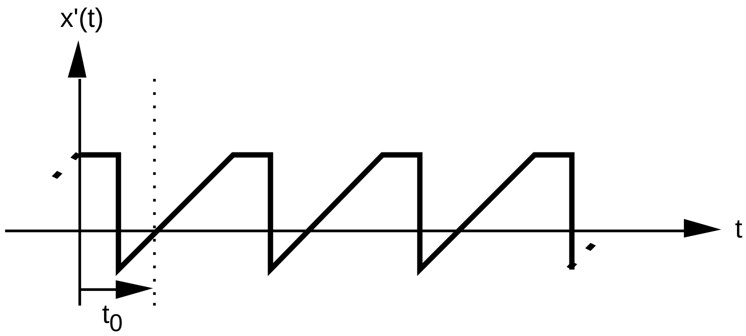
$$a_k = \begin{cases} -\frac{2A}{k^2\pi^2} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

$$b_k = -\frac{A}{k\pi}$$

3. Gegeben ist eine beliebige periodische Funktion x(t):



Die Fourier-Koeffizienten a_0, A_k (k N) und ϕ_k (k N) seien bekannt.
Nun wird x(t) zeitlich um t_0 verschoben, und man erhält die verschobene Funktion $x'(t) = x(t-t_0)$:



a) Beurteilen Sie, inwiefern sich die Fourier-Koeffizienten a_0', A_k' (k N) und ϕ_k' (k N) der verschobenen Funktion x'(t) gegenüber den Koeffizienten a_0, A_k (k N) und ϕ_k (k N) der ursprünglichen Funktion x(t) verändert haben.

b) Prüfen Sie die Ergebnisse aus a) am Beispiel der beiden zueinander zeitlich verschobenen Rechtecksfunktionen aus der Aufgabe 2 a) und b) nach.

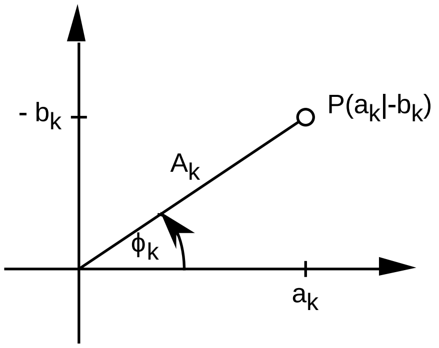
4. * Der Term $a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)$ kann geschrieben werden als reine Sinus-Funktion:

$$a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) = B_k \cdot \sin(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

Leiten Sie analog zur Aufgabe 1 die Beziehungen zwischen den Koeffizienten (a_k, b_k) und den Koeffizienten (B_k, φ_k) her.

Lösungen

1.



$$A_k = \sqrt{a_k{}^2 + b_k{}^2}$$

$$\phi_k = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) & (a_k>0) \\ -\frac{\pi}{2} & (a_k=0 \quad b_k>0) \\ \frac{\pi}{2} & (a_k=0 \quad b_k<0) \\ -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) + \pi & (a_k<0) \end{cases}$$

2. a) i)

$$A_k = \begin{cases} \frac{2}{k\pi} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

$$\phi_k = \begin{cases} 0 & (k = 1,5,9,\ldots) \\ \pi & (k = 3,7,11,\ldots) \\ \text{unbestimmt} & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

ii) Sinus-/Cosinus-Darstellung:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(\omega_0 t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\omega_0 t) + \frac{2}{5\pi}\cos(5\omega_0 t) - \frac{2}{7\pi}\cos(7\omega_0 t) + \ldots$$

Betrags-/Phasen-Darstellung:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(\omega_0 t) + \frac{2}{3\pi}\cos(3\omega_0 t+\pi) + \frac{2}{5\pi}\cos(5\omega_0 t) + \frac{2}{7\pi}\cos(7\omega_0 t+\pi) + \ldots$$

b) i)

$$A_k = \begin{cases} \frac{2}{k\pi} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

$$\phi_k = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (k \text{ ungerade}) \\ \text{unbestimmt} & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

ii) Sinus-/Cosinus-Darstellung:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin(\omega_0 t) + \frac{2}{3\pi}\sin(3\omega_0 t) + \frac{2}{5\pi}\sin(5\omega_0 t) + \frac{2}{7\pi}\sin(7\omega_0 t) + \ldots$$

Betrags-/Phasen-Darstellung:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{3\pi}\cos\left(3\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{5\pi}\cos\left(5\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \ldots$$

c) i)

$$A_k = \begin{cases} \frac{A}{k^2\pi^2}\sqrt{4+k^2\pi^2} & (k \text{ ungerade}) \\ \frac{A}{k\pi} & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

$$\phi_k = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \pi & (k \text{ ungerade}) \\ \frac{\pi}{2} & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

ii) Sinus-/Cosinus-Darstellung:

$$x(t) = \frac{3A}{4} - \frac{2A}{\pi^2}\cos(\omega_0 t) - \frac{2A}{9\pi^2}\cos(3\omega_0 t) - \frac{2A}{25\pi^2}\cos(5\omega_0 t) - \ldots$$

$$- \frac{A}{\pi}\sin(\omega_0 t) - \frac{A}{2\pi}\sin(2\omega_0 t) - \frac{A}{3\pi}\sin(3\omega_0 t) - \ldots$$

Betrags-/Phasen-Darstellung:

$$x(t) = \frac{3A}{4} + \frac{A}{\pi^2}\sqrt{4+\pi^2}\cos\left(\omega_0 t - \arctan\left(\frac{\pi}{2}\right) + \pi\right) + \frac{A}{2\pi}\cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$+ \frac{A}{9\pi^2}\sqrt{4+9\pi^2}\cos\left(3\omega_0 t - \arctan\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \pi\right) + \frac{A}{4\pi}\cos\left(4\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$+ \frac{A}{25\pi^2}\sqrt{4+25\pi^2}\cos\left(5\omega_0 t - \arctan\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \pi\right) + \frac{A}{6\pi}\cos\left(6\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) + \ldots$$

3. a)

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \phi_k)$$

$$x'(t) = x(t-t_0) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos\left(k\omega_0(t-t_0) + \phi_k\right)$$

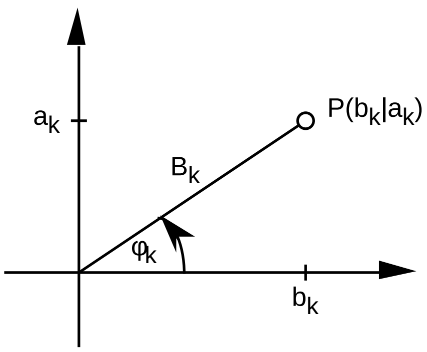
$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos\left(k\omega_0 t + (\phi_k - k\omega_0 t_0)\right) \overset{!}{=} a_0' + \sum_{k=1}^{\infty} A_k' \cdot \cos(k\omega_0 t + \phi_k')$$

$a_0' = a_0$
$A_k' = A_k$
$\phi_k' = \phi_k - k\omega_0 t_0$

Eine zeitliche Verschiebung ändert in den einzelnen Fourier-Komponenten nur die Phasen, die Amplituden bleiben gleich.

b) …

4. * $a_k = B_k \cdot \sin(\varphi_k)$
$b_k = B_k \cdot \cos(\varphi_k)$



$$B_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\varphi_k = \begin{cases} \arctan\left(\frac{a_k}{b_k}\right) & (b_k > 0) \\ \frac{\pi}{2} & (b_k = 0 \quad a_k > 0) \\ -\frac{\pi}{2} & (b_k = 0 \quad a_k < 0) \\ \arctan\left(\frac{a_k}{b_k}\right) + \pi & (b_k < 0) \end{cases}$$