

## Übung 7      Reelle Fourier-Reihe a<sub>0</sub>, Gerade/ungerade/konstante/trigonom. Funktionen, Linearität

<b>PUZZLE</b>
---------------

### Themen

- 1      **a<sub>0</sub>**
- 2      **Gerade / ungerade Funktion**
- 3      **Konstante / trigonometrische Funktion**
- 4 \*    **Linearität**

### Lernziele

- 1      **a<sub>0</sub>**
  - verstehen, dass der konstante Anteil in der reellen Fourier-Reihe einer periodischen Funktion der zeitliche Mittelwert der Funktion über eine Grundperiode ist.
  - verstehen, dass sich in der reellen Fourier-Reihe einer periodischen Funktion nur der konstante Anteil ändert, wenn man die Funktion mit einer Konstanten addiert.
- 2      **Gerade / ungerade Funktion**
  - verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer geraden periodischen Funktion eine reine Cosinus-Reihe ist.
  - verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer ungeraden periodischen Funktion eine reine Sinus-Reihe ohne konstanten Anteil ist.
- 3      **Konstante / trigonometrische Funktion**
  - verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer konstanten Funktion weder Cosinus- noch Sinus-Glieder enthält sondern lediglich einen konstanten Anteil.
  - verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer reinen Cosinus-Funktion ein einziges Cosinus-Glied enthält.
  - verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer reinen Sinus-Funktion ein einziges Sinus-Glied enthält.
- 4 \*    **Linearität**
  - verstehen, dass die Operationen, welche einer periodischen Funktion deren reelle Fourier-Koeffizienten zuordnen, linear sind.

### Aufgaben

- 1      **a<sub>0</sub>**

#### *Einzelstudium*

Finden Sie schlüssige Erklärungen dafür, dass die beiden folgenden Aussagen über den konstanten Anteil  $a_0$  der reellen Fourier-Reihe einer periodischen Funktion  $x(t)$  wahr sind:

Die Konstante  $a_0$  ist gleich dem zeitlichen Mittelwert der Funktion  $x(t)$  über eine Grundperiode  $T_0$ .

Addiert man die Funktion  $x(t)$  mit einer Konstanten, so ändert sich in der reellen Fourier-Reihe nur der konstante Anteil  $a_0$ . Die Cosinus- und Sinus-Glieder bleiben unverändert.

#### *Expertenrunde*

Diskutieren Sie gemeinsam die Aufgabe, die Sie im Einzelstudium bearbeitet haben, und klären Sie in der Gruppe alle Unklarheiten ab.

#### *Unterrichtsrunde*

Unterrichten Sie Ihre Kollegen/-innen über Ihr Thema 1.

Lassen Sie sich von Ihren Kollegen/-innen über die Themen 2, 3, 4 unterrichten.

## 2 Gerade / ungerade Funktion

### Einzelstudium

Betrachten Sie die folgenden beiden Aussagen über die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion  $x(t)$ :

$x(t)$  **gerade** Die reelle Fourier-Reihe von  $x(t)$  enthält nur **Cosinus**-Glieder, d.h.

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1} a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t)$$

$x(t)$  **ungerade** Die reelle Fourier-Reihe von  $x(t)$  enthält nur **Sinus**-Glieder und keinen konstanten Anteil, d.h.

$$x(t) = \sum_{k=1} b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t)$$

- Finden Sie schlüssige Erklärungen dafür, dass die beiden Aussagen wahr sind.
- Finden Sie aus dem Unterricht oder aus Tabellen Beispiele von Funktionen  $x(t)$ , an welchen Sie die Aussagen nachprüfen können.

### Expertenrunde

Diskutieren Sie gemeinsam die Aufgabe, die Sie im Einzelstudium bearbeitet haben, und klären Sie in der Gruppe alle Unklarheiten ab.

### Unterrichtsrunde

Unterrichten Sie Ihre Kollegen/-innen über Ihr Thema 2.

Lassen Sie sich von Ihren Kollegen/-innen über die Themen 1, 3, 4 unterrichten.

## 3 Konstante / trigonometrische Funktion

### Einzelstudium

Finden Sie schlüssige Erklärungen dafür, dass die drei folgenden Aussagen über die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion  $x(t)$  wahr sind:

$$x(t) = x_0 = \text{konst.}$$

Die reelle Fourier-Reihe von  $x(t)$  enthält weder Cosinus- noch Sinus-Glieder sondern lediglich einen konstanten Anteil, d.h.

$$x(t) = a_0 \quad \text{mit } a_0 = x_0$$

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t)$$

Die reelle Fourier-Reihe von  $x(t)$  enthält nur ein einziges Cosinus-Glied, d.h.

$$x(t) = a_1 \cdot \cos(\omega_0 t) \quad \text{mit } a_1 = A \text{ und } a_0 = 0$$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Die reelle Fourier-Reihe von  $x(t)$  enthält nur ein einziges Sinus-Glied, d.h.

$$x(t) = b_1 \cdot \sin(\omega_0 t) \quad \text{mit } b_1 = A \text{ und } a_0 = 0$$

### Expertenrunde

Diskutieren Sie gemeinsam die Aufgabe, die Sie im Einzelstudium bearbeitet haben, und klären Sie in der Gruppe alle Unklarheiten ab.

### Unterrichtsrunde

Unterrichten Sie Ihre Kollegen/-innen über Ihr Thema 3.

Lassen Sie sich von Ihren Kollegen/-innen über die Themen 1, 2, 4 unterrichten.

#### 4 \* **Linearität**

##### *Einzelstudium*

In der Aufgabe 2 der Übung 3 haben Sie gezeigt, dass die Operation, die einer periodischen Funktion  $x(t)$  den Fourier-Koeffizienten  $a_0$  zuordnet, linear ist:

$$a_0: \quad x(t) \quad a_0(x(t)) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt$$

Finden Sie nun schlüssige Erklärungen dafür, dass auch diejenigen Operationen linear sind, welche der Funktion  $x(t)$  die Fourier-Koeffizienten  $a_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) und  $b_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) zuordnen:

$$a_k: \quad x(t) \quad a_k(x(t)) = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t) dt$$

$$b_k: \quad x(t) \quad b_k(x(t)) = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t) dt$$

Hinweis:

Bei der Beurteilung der Linearität betrachtet man eine Darstellung von  $x(t)$  als Linearkombination von zwei Teilfunktionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$ :

$$x(t) = \alpha_1 \cdot x_1(t) + \alpha_2 \cdot x_2(t)$$

- i) Nehmen Sie an, dass  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  die gleiche Grundperiode besitzen.
- ii) \*\* Worin liegt die Problematik, falls  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  unterschiedliche Grundperiode besitzen.

##### *Expertenrunde*

Diskutieren Sie gemeinsam die Aufgabe, die Sie im Einzelstudium bearbeitet haben, und klären Sie in der Gruppe alle Unklarheiten ab.

##### *Unterrichtsrunde*

Unterrichten Sie Ihre Kollegen/-innen über Ihr Thema 4.

Lassen Sie sich von Ihren Kollegen/-innen über die Themen 1, 2, 3 unterrichten.