Übung 3 Operationen Linearität

Lernziel

- beurteilen können, ob eine Operation linear ist oder nicht.

Aufgaben

1. Beurteilen Sie, ob die folgenden Operationen linear sind oder nicht:

   a) $T: \quad x(t) \to T\big(x(t)\big) = \int 2 \cdot x(t)\, dt$

   b) $T: \quad y(t) \to T\big(y(t)\big) = \int_0^1 \big(y(t)+1\big)\, dt$

   c) $y: \quad t \to y(t) = \int_0^t \cos(\tau)\, d\tau$

2. Im Zusammenhang mit den Fourier-Reihen und der Fourier-Transformation treten Abbildungen auf, die eine Menge von Funktionen auf eine andere Menge abbilden:

   T: Menge von Funktionen → Menge von ...
   $x(t) \to T\big(x(t)\big) = \ldots$

   Zwei Beispiele solcher Abbildungen sind die folgenden:

   $a_k: \quad x(t) \to a_0\big(x(t)\big) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t)\, dt$

   $FT: \quad x(t) \to FT\big(x(t)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$

   ($FT\big(x(t)\big)$ hängt vom Wert der reellen Variablen ω ab.)

   a) Beurteilen Sie für beide Abbildungen, aus was für Objekten (Zahlen, Funktionen, Vektoren, Matrizen, etc.) die "Output-Menge" besteht.

   b) Zeigen Sie, dass die beiden Abbildungen linear sind.

3. Beurteilen Sie, für welche Werte der reellen Parameter m, q, a, Δt die folgenden Operationen linear sind:

   a) $f: \quad x \to f(x) = mx + q$ (m R, q R)

   b) * $T: \quad x \to T(x) = \int_0^1 (x+at)\, dt$ (a R)

   c) * $T: \quad t \to T(t) = \int_t^{t+\Delta t} (x+a)\, dx$ ($\Delta t>0$, a R)

Lösungen

1. a) linear
   b) nicht linear
   c) nicht linear
2. a) a_0: Menge von Funktionen → Menge von **Zahlen**
   FT: Menge von Funktionen → Menge von **Funktionen**
   b) …
3. a) $q = 0$
   b) * $a = 0$
   c) * $\frac{\Delta t}{2} + a = 0$