Übung 2 Funktionen
Periodizität, Symmetrie

Lernziele

- neue Sachverhalte analysieren können.
- beurteilen können, ob eine Funktion periodisch ist oder nicht.
- die Grundperiode einer Funktion bestimmen können.
- beurteilen können, ob eine Funktion gerade, ungerade oder weder gerade noch ungerade ist.

Aufgaben

Periodizität

Bei den Aufgaben 1 bis 4 können Sie von der folgenden Voraussetzung ausgehen:
$x(t) = \sin(t)$ bzw. $\cos(t)$ Grundperiode $T_0 = 2\pi$

1. Gegeben sind die beiden Funktionen $x_1(t) = \sin(\omega_0 t)$ und $x_2(t) = \cos(\omega_0 t)$.
   a) Bestimmen Sie die Grundperiode T_0 der Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.
   b) Bestimmen Sie alle Perioden T der Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

2. Gegeben sind die beiden Funktionen $x_1(t) = \sin(k\omega_0 t)$ und $x_2(t) = \cos(k\omega_0 t)$ mit k Z.
   a) Zeigen Sie, dass $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ eine Periode der beiden Funktionen ist.
   b) Bestimmen Sie die Grundperiode T_0 der beiden Funktionen.

3. Beurteilen Sie, ob die gegebenen Funktionen periodisch sind oder nicht.
   Geben Sie für die periodischen Funktionen die Grundperiode T_0 an.
   Sie müssen keine strengen Beweise führen. Es genügt z.B., wenn Sie den Grafen der Funktion skizzieren und daraus die Grundperiode herauslesen.

a)	$x(t) = \lvert\cos(t)\rvert$	b)	$x(t) = \sin(\lvert t\rvert)$	c)	$x(t) = \cos(\lvert t\rvert)$
d)	$x(t) = \cos^2(2t)$	e)	$x(t) = \cos(t^2)$	f)	$x(t) = e^{jt}$
g)	$x(t) = e^{j\omega_0 t}$	h)	$x(t) = e^{jk\omega_0 t}$	i)	$x(t) = \sin(t)\cdot\cos(t)$
j)	$x(t) = \sin(t) + \cos(t)$	k)	$x(t) = \sin(3t) + \sin\left(\frac{5}{2}t\right)$	l)	$x(t) = \cos(2t) + \cos(\pi t)$

4. Skizzieren Sie die Grafen der folgenden Funktionen, und bestimmen Sie deren Grundperiode T_0:

   a) $$x(t) = \begin{cases} t^2 & (-\pi \le t < 0) \\ 0 & (0 \le t < \pi) \end{cases}, \qquad x(t+2\pi) = x(t)$$

   b) $$x(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}t & \left(0 \le t < \frac{\pi}{2}\right) \\ -\frac{2}{\pi}t + 2 & \left(\frac{\pi}{2} \le t < \frac{3\pi}{2}\right) \\ \frac{2}{\pi}t - 4 & \left(\frac{3\pi}{2} \le t < 2\pi\right) \end{cases}, \qquad x(t+2\pi) = x(t)$$

Symmetrie

5. Überlegen Sie sich die Richtigkeit der Bemerkungen 1 und 2 auf dem Theorieblatt "Symmetrie" durch anschauliche Argumente, d.h. ohne strenge Beweise.

6. Überlegen Sie sich die Richtigkeit der Bemerkung 3 auf dem Theorieblatt "Symmetrie".
   Vorgehen:
   - Betrachten Sie das Produkt zweier Funktionen $x(t) := x_1(t)\cdot x_2(t)$.
   - Zeigen Sie, dass die folgenden drei Aussagen wahr sind:

i)	x_1 gerade x_2 gerade	x gerade, d.h. $x(-t) \equiv x(t)$
ii)	x_1 ungerade x_2 ungerade	x gerade, d.h. $x(-t) \equiv x(t)$
iii)	x_1 gerade x_2 ungerade	x ungerade, d.h. $x(-t) \equiv -x(t)$

7. * Überlegen Sie sich die Richtigkeit der Bemerkung 4 auf dem Theorieblatt Seite 2.
Vorgehen:
- Betrachten Sie die folgenden beiden Funktionen x_g und x_u:

$$x_g(t) := \frac{1}{2}\left(x(t) + x(-t)\right)$$

$$x_u(t) := \frac{1}{2}\left(x(t) - x(-t)\right)$$

- Zeigen Sie, dass die folgenden drei Aussagen wahr sind:
    - i) Für jede beliebige Funktion x(t) ist die Funktion x_g eine gerade Funktion.
    - ii) Für jede beliebige Funktion x(t) ist die Funktion x_u eine ungerade Funktion.
    - iii) $x(t) = x_g(t) + x_u(t)$

8. Beurteilen Sie, ob die folgenden Funktionen gerade, ungerade oder weder gerade noch ungerade sind:

a)	$y(x) = x^n$ (n N)	b)	$x(t) = \sin(t)$	c)	$x(t) = \cos(t)$
d)	$x(t) = \sin(2t)$	e)	$f(x) = \lvert\sin(2x)\rvert$	f)	$y(x) = x\cdot\sin(x^2)$
g)	$f(x) = x^2\cdot\sin(\lvert x\rvert)$	h)	$y(t) = e^t$	i)	$f(x) = e^{-x^2}$
j)	$x(t) = e^{jt}$	k)	$f(x) = x\cdot e^{-x^2}$	l)	$x(t) = \sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$
m)	$y(t) = 2t^2+3t+4$	n)	$f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$		

Lösungen

1. a) $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

   b) $T = k \cdot T_0 = k \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}$ (k Z)

2. a) …

   b) $T_0 = \frac{2\pi}{k\omega_0}$

3.

a)	$T_0 = \pi$	b)	nicht periodisch	c)	$T_0 = 2\pi$
d)	$T_0 = \frac{\pi}{2}$	e)	nicht periodisch	f)	$T_0 = 2\pi$
g)	$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$	h)	$T_0 = \frac{2\pi}{k\omega_0}$	i)	$T_0 = \pi$
j)	$T_0 = 2\pi$	k)	$T_0 = 4\pi$	l)	nicht periodisch

4. a) $T_0 = 2\pi$ b) $T_0 = 2\pi$

5. ….

6. i)
$$\begin{aligned} x(-t) &= x_1(-t) \cdot x_2(-t) \\ &= x_1(t) \cdot x_2(-t) && \left(\text{da } x_1 \text{ gerade ist} \quad x_1(-t) = x_1(t)\right) \\ &= x_1(t) \cdot x_2(t) && \left(\text{da } x_2 \text{ gerade ist} \quad x_2(-t) = x_2(t)\right) \\ &= x(t) \end{aligned}$$

   ii) …

   iii) …

7. * i) $x_g(-t) = \frac{1}{2}\left(x(-t) + x(t)\right) = \frac{1}{2}\left(x(t) + x(-t)\right) = x_g(t)$

   ii) …

   iii) $x_g(t) + x_u(t) = \frac{1}{2}\left(x(-t) + x(t)\right) + \frac{1}{2}\left(x(-t) - x(t)\right) = x(t)$

8.

a)	gerade, falls n gerade ungerade, falls n ungerade	b)	ungerade
c)	gerade	d)	ungerade
e)	gerade	f)	ungerade
g)	gerade	h)	weder gerade noch ungerade
i)	gerade	j)	weder gerade noch ungerade
k)	ungerade	l)	weder gerade noch ungerade
m)	weder gerade noch ungerade	n)	weder gerade noch ungerade