Parseval'sche Beziehung

Diskrete Fourier-Transformierte $\mathrm{DFT}(x[n]) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi mn/N}$

Parseval'sche Beziehung	$\sum_{n=0}^{N-1} \lvert x[n]\rvert^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \lvert X[m]\rvert^2$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot x[n]^* \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left(\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m]\, e^{j2\pi mn/N} \right)^* \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left(\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m]^*\, e^{-j2\pi mn/N} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{N}\, x[n]\, X[m]^*\, e^{-j2\pi mn/N} \right) \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N}\, x[n]\, X[m]^*\, e^{-j2\pi mn/N} \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m]^* \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi mn/N} \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m]^*\, X[m] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |X[m]|^2
\end{aligned}
$$

Physikalische Interpretation:

Physikalische Interpretation:	$x[n]$	:	"Signal" zur Zeit $t = nT$ (elektr. Spannung, elektr. Stromstärke, ...)
	$\lvert x[n]\rvert^2$		Momentanleistung des Signals zum Zeitpunkt $t = nT$ (Proportionalitätskonstante hängt nur von Systemparametern ab, z.B. Widerstand R)
	$\sum_{n=0}^{N-1} \lvert x[n]\rvert^2$ $= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \lvert X[m]\rvert^2$		Aufsummierte Leistung des Signals zu den Zeitpunkten $t = 0, T, ..., (N-1)T$
	$\lvert X[m]\rvert^2$		Leistung im Signal in der Frequenz $\omega = m\cdot\frac{2\pi}{NT}$