Parseval'sche Beziehung

x(t) aperiodisch

Fourier-Integral $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} \, d\omega$

Fourier-Transformierte $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \, dt$

Parseval'sche Beziehung $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega}$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x^*(t) \, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} \, d\omega \right)^* dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) \cdot e^{-j\omega t} \, d\omega \right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} X^*(\omega) \cdot x(t) \cdot e^{-j\omega t} \, d\omega \right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} X^*(\omega) \cdot x(t) \cdot e^{-j\omega t} \, dt \right) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \, dt \right) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) \cdot X(\omega) \, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega
\end{aligned}
$$

Physikalische Interpretation:	$x(t)$	:	"Signal" (elektr. Spannung, elektr. Stromstärke, ...)
	$\lvert x(t)\rvert^2$		Momentanleistung des Signals (Proportionalitätskonstante hängt nur von Systemparametern ab, z.B. Widerstand R)
	$\lvert x(t)\rvert^2\,dt$		Energie im Signal im Zeitintervall $[t,t+dt]$
	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2\,dt$		**Gesamtenergie** im Signal
	$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(\omega)\rvert^2\,d\omega$		
	$\lvert X(\omega)\rvert^2\,d\omega$		Energie im Signal im Frequenzintervall $[\omega,\omega+d\omega]$
	$\lvert X(\omega)\rvert^2$		**Energiedichte** im Signal

$|X(\omega)|^2$ wird als **Energiedichtespektrum** bezeichnet.