# Parseval'sche Beziehung

$x(t)$ periodisch mit Grundperiode $T_0$ bzw. Grundfrequenz $\omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$

**Komplexe Fourier-Reihe**

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} x(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

**Parseval'sche Beziehung**

$$\frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} |x(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Beweis:

$$\frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} x(t)\cdot x^*(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} x(t)\cdot\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t}\right)^* dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} x(t)\cdot\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^*\, e^{-jk\omega_0 t}\right) dt$$

$$= \int_{(T_0)}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0}\, c_k^*\, x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\right) dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int_{(T_0)} \frac{1}{T_0}\, c_k^*\, x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^*\left(\frac{1}{T_0}\int_{(T_0)} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^*\, c_k$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| Physikalische Interpretation: | $x(t)$ | : | "Signal"<br>(elektr. Spannung, elektr. Stromstärke, ...) |
| | $\lvert x(t)\rvert^2$ | | Momentanleistung des Signals zum Zeitpunkt t<br>(Proportionalitätskonstante hängt nur von Systemparametern ab, z.B. Widerstand R) |
| | $\lvert x(t)\rvert^2\, dt$ | | Energie im Signal im Zeitintervall [t,t+dt] |
| | $\frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} \lvert x(t)\rvert^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert c_k\rvert^2$ | | **Mittlere Leistung** des Signals |
| | $\lvert c_k\rvert^2$ | | Mittlere Leistung der k-ten Fourier-Komponente des Signals |