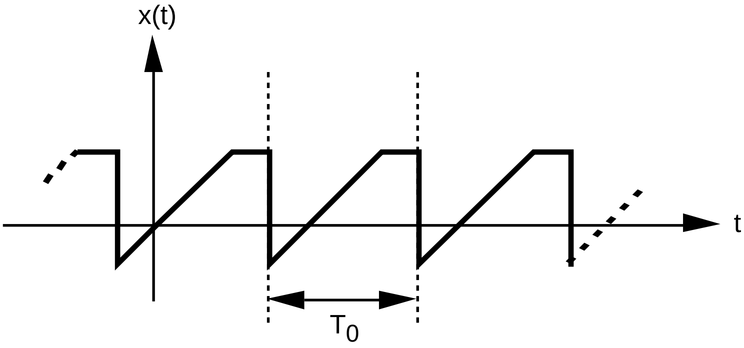
Reelle Fourier-Reihe

Definition

Periodische Funktion bzw. periodisches Signal x(t) mit Grundperiode T_0



Die trigonometrische Reihe in der Darstellung

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right) \qquad \omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$$

ist die **reelle Fourier-Reihe** von x(t).

Die Konstanten a_0, a_k $(k \in \mathbb{N})$, b_k $(k \in \mathbb{N})$ sind die **reellen Fourier-Koeffizienten**.

Die Fourier-Reihen-Darstellung erlaubt es, x(t) in einen konstanten Anteil, in eine Grundschwingung und in Oberschwingungen aufzuteilen:

$x(t) = a_0$	Konstanter Anteil
$+ \; a_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + b_1 \cdot \sin(\omega_0 t)$	1. Harmonische, Grundschwingung
$+ \; a_2 \cdot \cos(2\omega_0 t) + b_2 \cdot \sin(2\omega_0 t)$	2. Harmonische, 1. Oberschwingung
$+ \; a_3 \cdot \cos(3\omega_0 t) + b_3 \cdot \sin(3\omega_0 t)$	3. Harmonische, 2. Oberschwingung
$+ \; \ldots$	
$+ \; a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)$	n. Harmonische, (n-1). Oberschwingung
$+ \; \ldots$	

Bestimmung der reellen Fourier-Koeffizienten

a_0

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right) \qquad \Big| \int_0^{T_0} \ldots \, dt$$

$$\int_0^{T_0} x(t)\, dt = \int_0^{T_0} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right) \right) dt$$

$$= \ldots$$

$$= a_0 \cdot T_0 \qquad \Big| : T_0$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)\, dt$$

a_k ($k \in \mathbb{N}$)

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)\right) \qquad \Big| \cdot \cos(m\omega_0 t)\,,\ m \in \mathbb{N}$$

$$\Big| \int_0^{T_0} \ldots\, dt$$

$$\int_0^{T_0} x(t)\cdot\cos(m\omega_0 t)\, dt = \int_0^{T_0} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)\right) \right) \cdot \cos(m\omega_0 t)\, dt$$

$$= \ldots$$

$$= a_m \cdot \frac{T_0}{2} \qquad \Big| : \frac{T_0}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)\cdot\cos(k\omega_0 t)\, dt$$

b_k ($k \in \mathbb{N}$)

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)\right) \qquad \Big| \cdot \sin(m\omega_0 t)\,,\ m \in \mathbb{N}$$

$$\Big| \int_0^{T_0} \ldots\, dt$$

$$\int_0^{T_0} x(t)\cdot\sin(m\omega_0 t)\, dt = \int_0^{T_0} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)\right) \right) \cdot \sin(m\omega_0 t)\, dt$$

$$= \ldots$$

$$= b_m \cdot \frac{T_0}{2} \qquad \Big| : \frac{T_0}{2}$$

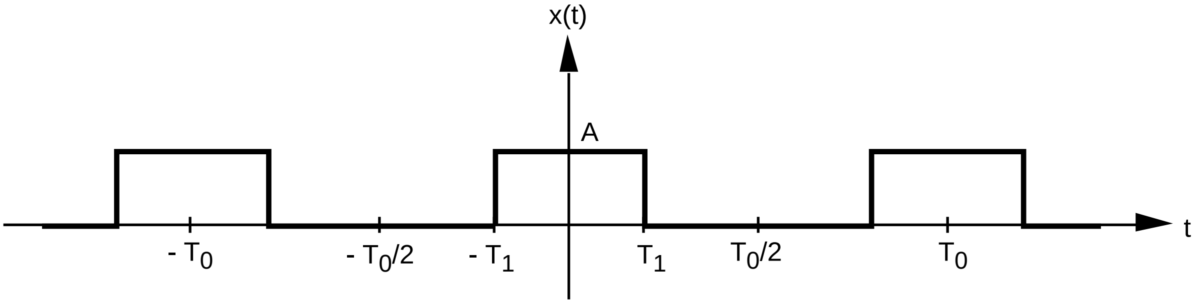
$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)\cdot\sin(k\omega_0 t)\, dt$$

Da die Integranden in den Integralen für a_0, a_k ($k \in \mathbb{N}$), b_k ($k \in \mathbb{N}$) die Periode T_0 besitzen, kann über ein beliebiges Intervall der Länge T_0 integriert werden:

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t)\, dt \\ a_k &= \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t)\cdot\cos(k\omega_0 t)\, dt \\ b_k &= \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t)\cdot\sin(k\omega_0 t)\, dt \end{aligned}}$$

Beispiel

$$x(t) = \begin{cases} A & (|t|<T_1) \\ 0 & \left(T_1<|t|<\frac{T_0}{2}\right) \end{cases} \quad , \qquad x(t+T_0) = x(t)$$



$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t)\, dt = ... = \frac{2AT_1}{T_0}$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t)\cdot\cos(k\omega_0 t)\, dt = ... = \frac{2A\cdot\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t)\cdot\sin(k\omega_0 t)\, dt = ... = 0$$

$$x(t) = \frac{2AT_1}{T_0} + \frac{2A\cdot\sin(\omega_0 T_1)}{\pi}\cos(\omega_0 t) + \frac{2A\cdot\sin(2\omega_0 T_1)}{2\pi}\cos(2\omega_0 t) + \frac{2A\cdot\sin(3\omega_0 T_1)}{3\pi}\cos(3\omega_0 t) + \ldots$$