

Komplexe Zahlen

Menge der komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} := \{z \mid z = x + j \cdot y \quad x \in \mathbb{R} \quad y \in \mathbb{R}\}$$

j = imaginäre Einheit

$$j^2 = -1$$

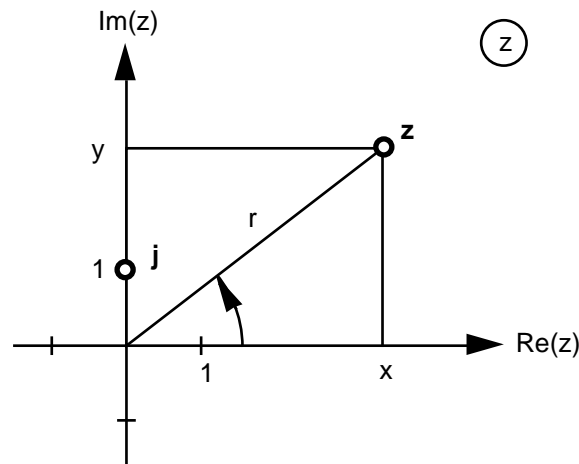
Darstellung einer komplexen Zahl

Kartesische Form $z = x + j \cdot y$

Polarform $z = r \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)) = r \cdot \text{cis}(\varphi)$

Exponentialform $z = r \cdot e^{j\varphi}$

Gauss'sche Zahlenebene



$x = \text{Re}(z)$	Realteil
$y = \text{Im}(z)$	Imaginärteil
$r = z $	Betrag
$\varphi = \arg(z)$	Argument

Euler'sche Formel

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$$

Bew.: Potenzreihenentwicklung

$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots$$

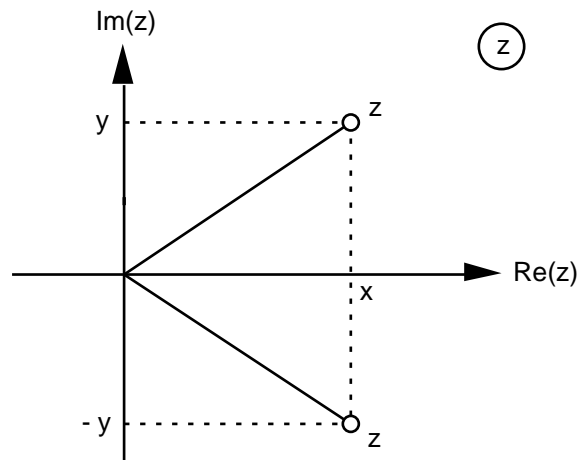
$$\sin(\varphi) = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots$$

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} &= 1 + j\varphi + \frac{(j\varphi)^2}{2!} + \frac{(j\varphi)^3}{3!} + \frac{(j\varphi)^4}{4!} + \frac{(j\varphi)^5}{5!} + \frac{(j\varphi)^6}{6!} + \dots \\ &= 1 + j\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - j\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + j\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - \dots \\ &= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots\right) + j \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Komplexe Konjugation

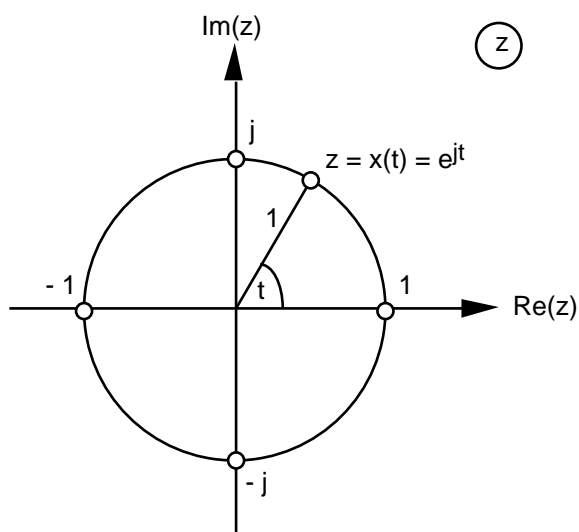
$$z = x + j \cdot y$$

$$z^* := x - j \cdot y \quad \text{komplex konjugierte Zahl}$$



Komplexe Exponentialfunktion

$$x: \quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \\ t \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathbb{C} \\ z = x(t) = e^{jt} \end{array}$$



$$x: \quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \\ t \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathbb{C} \\ z = x(t) = \hat{x} \cdot e^{j(k \cdot 0t - k)} \end{array}$$

