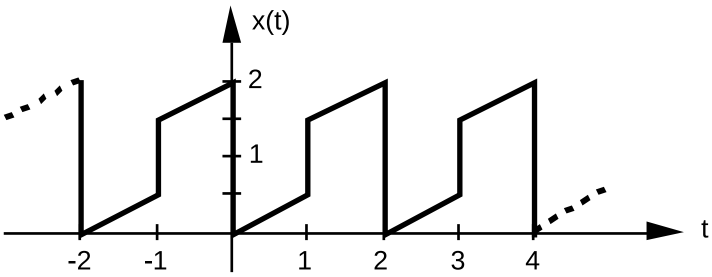
Klausur Mathematik 3 / TE / 30.1.2008

Name: .... **Punkte:** .... **Note:** ....

Dauer:	**90 Minuten**
Hilfsmittel:	**- beliebige schriftliche Unterlagen** **- Taschenrechner**
Bemerkungen:	**- Bei jeder Aufgabe muss der Lösungsweg vollständig, übersichtlich und verständlich dokumentiert werden.** **- Jede Aufgabe ist auf einem neuen Blatt zu bearbeiten.**

1. Gegeben ist der Graf einer periodischen Funktion x(t):



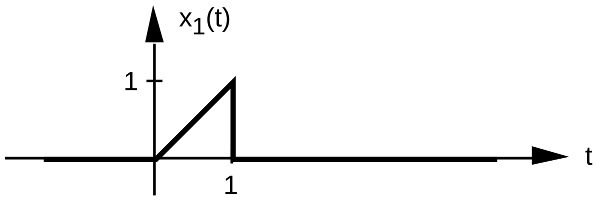
Bestimmen Sie alle reellen Fourier-Koeffizienten der Funktion x(t).

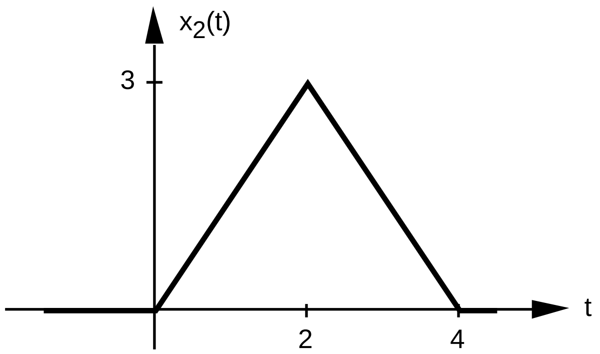
Verwenden Sie dazu die Fourier-Reihen-Tabelle, die auf den letzten beiden Seiten (Seiten 4 und 5) abgedruckt ist.

Hinweise:
- Der Taschenrechner ist bei dieser Aufgabe nicht erlaubt.
- Als Fourier-Reihen-Tabelle ist nur die erwähnte erlaubt.

5 Punkte ....

2. Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$:





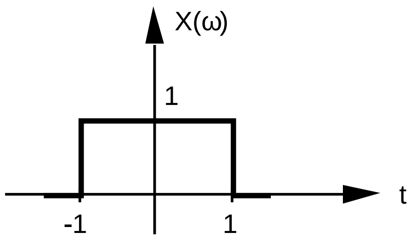
Die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ von $x_1(t)$ sei bekannt.

Drücken Sie die Fourier-Transformierte $X_2(\omega)$ von $x_2(t)$ durch die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ von $x_1(t)$ aus.

Geben Sie den Zusammenhang zwischen $X_2(\omega)$ und $X_1(\omega)$ in Form einer Formel $X_2(\omega) = ...$ an, mit welcher man $X_2(\omega)$ aus $X_1(\omega)$ bestimmen kann.

5 Punkte ....

3. Das Signal $x(t)$ habe das folgende Spektrum $X(\omega)$:



$x(t)$ wird mit dem Signal

$$m(t) = \cos(t) + 2\cos(2t)$$

moduliert. Man erhält so das modulierte Signal

$$x_m(t) := x(t) \cdot m(t)$$

Bestimmen Sie den Grafen des Spektrums $X_m(\omega)$ des modulierten Signals $x_m(t)$.

Drücken Sie also $X_m(\omega)$ durch das Spektrum $X(\omega)$ von $x(t)$ aus.

Hinweis:
Sie dürfen Ihre Ergebnisse aus der Aufgabe 5 der Übung 13 (bei entsprechendem Verweis) verwenden, d.h. Herleitungen, die Sie schon in der Aufgabe 5 der Übung 13 gemacht haben, müssen Sie jetzt nicht noch einmal ausführen.

5 Punkte ....

4. Entscheiden Sie ohne Begründung, welche der jeweils drei Aussagen wahr ist. Bei allen Teilaufgaben a) bis e) ist immer **genau eine** Aussage wahr.

Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.

Bewertung:
Jede Teilaufgabe gibt 1 Punkt, wenn das richtige Kästchen angekreuzt ist. Wenn in einer Teilaufgabe kein Kästchen, ein falsches oder mehr als ein Kästchen angekreuzt ist bzw. sind, gibt es für die entsprechende Teilaufgabe 0 Punkte.

a) Wenn die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion keine Cosinus-Glieder enthält, kann man ...

☐ ... folgern, dass die Funktion gerade ist.

☐ ... folgern, dass die Funktion ungerade ist.

☐ ... keine Folgerung über die Symmetrie der Funktion machen.

b) Es sei angenommen, dass sich zwei periodische Funktionen an einer endlichen Anzahl Stellen unterscheiden, d.h. dass die Funktionswerte der beiden Funktionen an einer endlichen Anzahl Stellen nicht übereinstimmen. Dann kann man folgern, dass ...

☐ ... die Fourier-Reihen der beiden Funktionen in allen Fourier-Koeffizienten übereinstimmen.

☐ ... sich die reellen Fourier-Reihen der beiden Funktionen in mindestens einem Sinus- oder Cosinus-Glied unterscheiden.

☐ ... die konstanten Anteile in den Fourier-Reihen der beiden Funktionen unterschiedlich sind.

c) Die kompexe Fourier-Reihe einer periodischen, reellwertigen Funktion ...

☐ ... hat an jeder Stelle den gleichen Funktionswert wie die reelle Fourier-Reihe.

☐ ... hat nur an der Stelle t=0 einen anderen Funktionswert als die reelle Fourier-Reihe.

☐ ... hat grundsätzlich Funktionswerte, die sich von denen der reellen Fourier-Reihe unterscheiden..

d) Die Fourier-Transformierte einer aperiodischen Funktion ist eine ...

☐ ... Funktion.

☐ ... Zahl.

☐ ... Zahlenmenge.

e) Eine Zeitskalierung einer Funktion wirkt sich im Allgemeinen ...

- [ ] ... sowohl auf den Betrag als auch auf das Argument der Fourier-Transformierten aus.
- [ ] ... nur auf den Betrag der Fourier-Transformierten aus. Das Argument bleibt unverändert.
- [ ] ... nur auf das Argument der Fourier-Transformierten aus. Der Betrag bleibt unverändert.

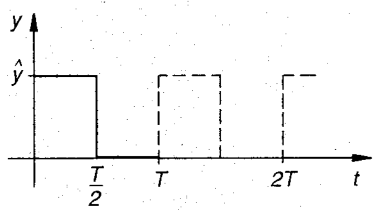
5 Punkte ....

Fourier-Reihen-Tabelle

Quelle: Lothar Papula, Mathematische Formelsammlung

1. Rechteckskurve

$$y(t) = \begin{cases} \hat{y} & \text{für } 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ 0 & \phantom{\text{für }} \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

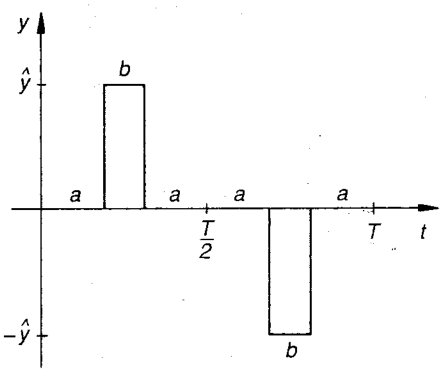


$$y(t) = \frac{\hat{y}}{2} + \frac{2\hat{y}}{\pi}\left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\cdot\sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5}\cdot\sin(5\omega_0 t) + \ldots\right)$$

2. Rechtecksimpuls

Impulsbreite: $b = \frac{T}{2} - 2a$

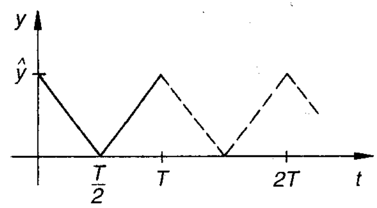
$$y(t) = \begin{cases} \hat{y} & & a < t < \frac{T}{2} - a \\ -\hat{y} & \text{für} & \frac{T}{2} + a < t < T - a \\ 0 & & \text{im übrigen Intervall} \end{cases}$$



$$y(t) = \frac{4\hat{y}}{\pi}\left(\frac{\cos(\omega_0 a)}{1}\cdot\sin(\omega_0 t) + \frac{\cos(3\omega_0 a)}{3}\cdot\sin(3\omega_0 t) + \right.$$
$$\left. + \frac{\cos(5\omega_0 a)}{5}\cdot\sin(5\omega_0 t) + \ldots\right)$$

3. Dreieckskurve

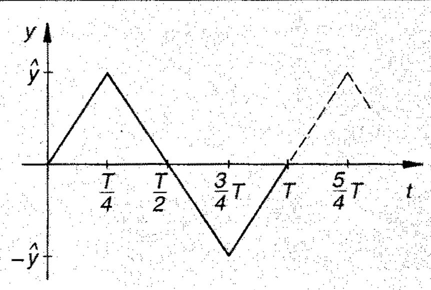
$$y(t) = \begin{cases} -\frac{2\hat{y}}{T}\,t + \hat{y} & & 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ & \text{für} & \\ \frac{2\hat{y}}{T}\,t - \hat{y} & & \frac{T}{2} \le t \le T \end{cases}$$



$$y(t) = \frac{\hat{y}}{2} + \frac{4\hat{y}}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\cdot\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{3^2}\cdot\cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2}\cdot\cos(5\omega_0 t) + \ldots\right)$$

4. Dreieckskurve

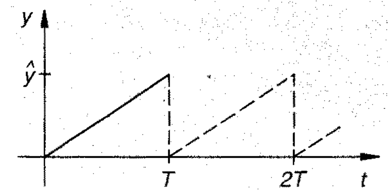
$$y(t) = \begin{cases} \frac{4\hat{y}}{T}\, t & 0 \le t \le \frac{T}{4} \\ -\frac{4\hat{y}}{T}\, t + 2\hat{y} \quad \text{für} & \frac{T}{4} < t < \frac{3}{4}\, T \\ \frac{4\hat{y}}{T}\, t - 4\hat{y} & \frac{3}{4}\, T \le t \le T \end{cases}$$



$$y(t) = \frac{8\hat{y}}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\cdot\sin(\omega_0 t) - \frac{1}{3^2}\cdot\sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2}\cdot\sin(5\omega_0 t) - + \dots\right)$$

5. Kippschwingung (Sägezahnimpuls)

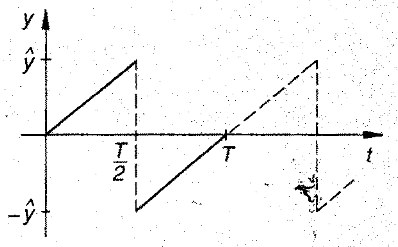
$$y(t) = \frac{\hat{y}}{T}\, t, \qquad 0 \le t < T$$



$$y(t) = \frac{\hat{y}}{2} - \frac{\hat{y}}{\pi}\left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\cdot\sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3}\cdot\sin(3\omega_0 t) + \dots\right)$$

6. Kippschwingung (Sägezahnimpuls)

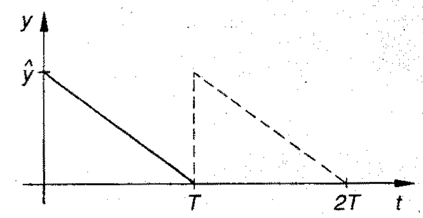
$$y(t) = \begin{cases} \frac{2\hat{y}}{T}\, t & 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ & \text{für} \\ \frac{2\hat{y}}{T}\, t - 2\hat{y} & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$



$$y(t) = \frac{2\hat{y}}{\pi}\left(\sin(\omega_0 t) - \frac{1}{2}\cdot\sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3}\cdot\sin(3\omega_0 t) - + \dots\right)$$

7. Kippschwingung (Sägezahnimpuls)

$$y(t) = -\frac{\hat{y}}{T}\, t + \hat{y}, \qquad 0 \le t < T$$



$$y(t) = \frac{\hat{y}}{2} + \frac{\hat{y}}{\pi}\left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\cdot\sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3}\cdot\sin(3\omega_0 t) + \dots\right)$$