

Klausur Mathematik 3 / TE / 14.3.2007

Name:

Punkte: Note:

Dauer: 90 Minuten

Hilfsmittel: - Taschenrechner
- beliebige schriftliche Unterlagen

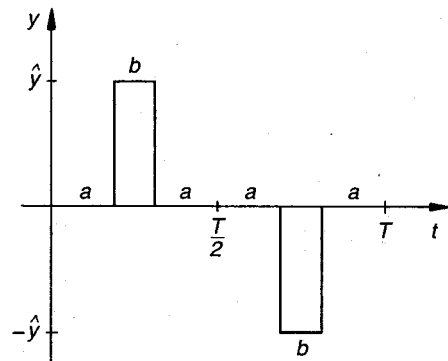
Bemerkungen: - Bei jeder Aufgabe muss der ganze Lösungsweg klar ersichtlich sein.
- Es wird auf eine übersichtliche Darstellung Wert gelegt.

1. In einer Fourier-Reihen-Tabelle ist die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Rechtecksimpuls-Funktion $y(t)$ aufgeführt:

2. Rechtecksimpuls

Impulsbreite: $b = \frac{T}{2} - 2a$

$$y(t) = \begin{cases} \hat{y} & a < t < \frac{T}{2} - a \\ -\hat{y} & \text{für } \frac{T}{2} + a < t < T - a \\ 0 & \text{im übrigen Intervall} \end{cases}$$

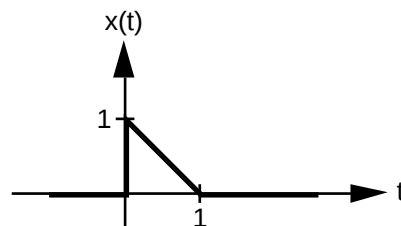


$$y(t) = \frac{4\hat{y}}{\pi} \left(\frac{\cos(\omega_0 a)}{1} \cdot \sin(\omega_0 t) + \frac{\cos(3\omega_0 a)}{3} \cdot \sin(3\omega_0 t) + \frac{\cos(5\omega_0 a)}{5} \cdot \sin(5\omega_0 t) + \dots \right)$$

Bestimmen Sie alle komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) der Funktion $y(t)$.

5 Punkte

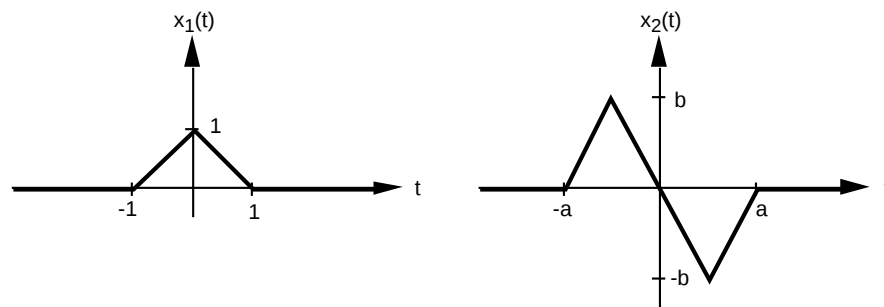
2. Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $X(\omega)$ der aperiodischen Funktion $x(t)$ von Hand, d.h. direkt aus dem Definitionsintegral der Fourier-Transformation und ohne weiteren Hilfsmittel (Fourier-Transformations-Tabelle, Taschenrechner):



Hinweis:
Kleine Integraltabelle auf der letzten Seite (Seite 3)

5 Punkte

3. Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ ($a>0$, $b>0$):



Die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ von $x_1(t)$ sei bekannt.

Drücken Sie die Fourier-Transformierte $X_2(\omega)$ von $x_2(t)$ durch die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ aus.

Geben Sie den Zusammenhang zwischen $X_2(\omega)$ und $X_1(\omega)$ in Form einer Formel $X_2(\omega) = \dots$ an, mit welcher man $X_2(\omega)$ aus $X_1(\omega)$ bestimmen könnte.

5 Punkte

4. Entscheiden Sie ohne Begründung, welche der jeweils drei Aussagen wahr ist. Bei allen Teilaufgaben a) bis e) ist immer **genau eine** Aussage wahr.

Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.

Bewertung:

Jede Teilaufgabe gibt 1 Punkt, wenn das richtige Kästchen angekreuzt ist. Wenn in einer Teilaufgabe kein Kästchen, ein falsches oder mehr als ein Kästchen angekreuzt ist bzw. sind, gibt es für die entsprechende Teilaufgabe 0 Punkte.

- a) Wenn die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion mindestens ein Cosinus-Glied enthält, kann man folgern, dass die Funktion ...

☐ ... nicht gerade ist.

☐ ... nicht ungerade ist.

☐ ... gerade ist.

- b) Die komplexe Fourier-Reihe einer reellwertigen, periodischen Funktion ist selber eine Funktion, deren Funktionswerte ...

☐ ... alles reelle Zahlen sind.

☐ ... alles komplexe (d.h. nicht-reelle) Zahlen sind.

☐ ... sowohl reelle als auch komplexe Zahlen sein können.

(Fortsetzung der Aufgabe 4 auf der Seite 3)

c) Die Fourier-Transformation ist eine Abbildung ...

☐

... einer Zahlenmenge auf eine Zahlenmenge.

☐

... einer Funktionenmenge auf eine Funktionenmenge.

☐

... einer Zahlenmenge auf eine Funktionenmenge.

d) Die Fourier-Transformierte einer periodischen Funktion ...

☐

... ist immer periodisch.

☐

... kann unter bestimmten Voraussetzungen an die Fourier-Koeffizienten der Funktion periodisch sein.

☐

... ist immer aperiodisch.

e) Eine Zeitverschiebung einer Funktion wirkt sich ...

☐

... sowohl auf den Betrag als auch auf das Argument der Fourier-Transformierten aus.

☐

... nur auf den Betrag der Fourier-Transformierten aus. Das Argument bleibt unverändert.

☐

... nur auf das Argument der Fourier-Transformierten aus. Der Betrag bleibt unverändert.

5 Punkte

Kleine Integraltabelle:

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int x \cdot e^{ax} dx = \left(\frac{ax-1}{a^2} \right) e^{ax} + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int x^2 \cdot e^{ax} dx = \left(\frac{x^2 - 2ax + 2}{a^3} \right) e^{ax} + C \quad (a \neq 0)$$