Klausur Mathematik 3 / TE / 22.11.2006

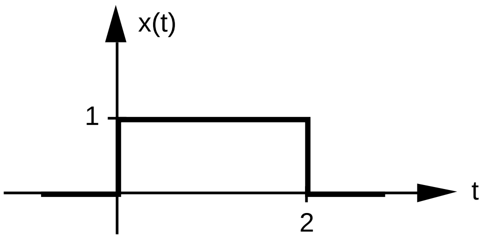
Name: .... **Punkte:** .... **Note:** ....

Dauer: **45 Minuten**

Hilfsmittel: **- Taschenrechner**
- beliebige schriftliche Unterlagen

Bemerkungen: **- Bei jeder Aufgabe muss der ganze Lösungsweg klar ersichtlich sein.**
- Es wird auf eine übersichtliche Darstellung Wert gelegt.

1. Gegeben ist der Graf einer Funktion x(t):



Bestimmen die Laplace-Transformierte X(s) von x(t). Geben Sie auch den Konvergenzbereich K von X(s) mit schlüssiger Begründung an.

Gehen Sie dabei von der Definitionsgleichung der Laplace-Transformation aus, und berechnen Sie das Integral von Hand, d.h. ohne Laplace-Transformations-Tabelle und ohne Taschenrechner.

5 Punkte ....

2. Gegeben ist die folgende Funktion x(t):

$$x(t) = 2\cdot(t-1)^6 - 3\cdot\sin(2t)$$

Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte X(s) von x(t) mit Hilfe der Laplace-Transformations-Tabelle aus dem Lehrbuch Papula sowie unter Anwendung der Eigenschaften der Laplace-Transformation.

Vorgabe:
Als Laplace-Transformations-Tabelle ist ausdrücklich nur diejenige aus dem Lehrbuch Papula erlaubt (Seiten 666 bis 668 bzw. Seite 4 dieser Klausur), d.h. keine weiteren Transformations-Tabellen aus anderen Quellen.

5 Punkte ....

3. Entscheiden Sie ohne Begründung, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.

	wahr	falsch
Die Laplace-Transformation ist eine Abbildung.	☐	☐
Die Laplace-Transformation ist immer eindeutig, d.h. zwei verschiedene Laplace-Transformierte können nicht Laplace-Transformierte von derselben Originalfunktion sein.	☐	☐
Eine Laplace-Transformierte ist im Allgemeinen eine Funktion, deren Funktionswerte komplexe Zahlen sind.	☐	☐
Der Konvergenzbereich einer Laplace-Transformierten ist zugleich der Definitionsbereich der Laplace-Transformierten.	☐	☐
Wenn eine komplexe Zahl s_1 im Konvergenzbereich einer Laplace-Transformierten liegt, dann liegen alle komplexen Zahlen mit gleichem Realteil wie s_1 ebenfalls im Konvergenzbereich.	☐	☐

5 Punkte ....

4. Entscheiden Sie ohne Begründung, welche der jeweils drei Aussagen wahr ist. Bei allen Teilaufgaben a) bis e) ist immer **genau eine** Aussage wahr.

Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.

Bewertung:
Jede Teilaufgabe gibt 1 Punkt, wenn das richtige Kästchen angekreuzt ist. Wenn in einer Teilaufgabe kein Kästchen, ein falsches oder mehr als ein Kästchen angekreuzt ist bzw. sind, gibt es für die entsprechende Teilaufgabe 0 Punkte.

a) Die Laplace-Transformierte ist eine Abbildung ...

☐ ... einer Zahlenmenge auf eine Zahlenmenge.

☐ ... einer Funktionenmenge auf eine Funktionenmenge.

☐ ... einer Zahlenmenge auf eine Funktionenmenge.

b) Der Konvergenzbereich einer Laplace-Transformierten X(s) gibt an, ...

☐ ... für welche s die Laplace-Transformierte existiert.

☐ ... für welche s die Laplace-Transformierte einen reellen Funktionswert hat.

☐ ... welche s reelle Zahlen sind.

(Fortsetzung der Aufgabe 4 auf der Seite 3)

c) Die Linearität der Laplace-Transformation ist darin begründet, dass ...

- ☐ ... das Transformations-Integral ein uneigentliches Integral ist.
- ☐ ... das Integrieren eine lineare Operation ist.
- ☐ ... die Laplace-Transformierte einer Summe zweier Funktionen die Summe der Laplace-Transformierten der beiden Funktionen ist.

d) Wenn man eine Funktion einer Zeitverschiebung unterwirft, dann ...

- ☐ ... bleibt die Laplace-Transformierte unverändert.
- ☐ ... ändert sich im Allgemeinen nur der Imaginärteil der Laplace-Transformierten.
- ☐ ... ändert sich im Allgemeinen sowohl der Real- als auch der Imaginärteil der Laplace-Transformierten.

e) Der Konvergenzbereich einer Laplace-Transformierten ist im Allgemeinen nur eine Teilmenge der Menge aller komplexen Zahlen. Dies ist darin begründet, dass ...

- ☐ ... das Laplace-Transformations-Integral ein uneigentliches Integral ist.
- ☐ ... nicht jede Exponentialfunktion monoton fallend ist.
- ☐ ... die Funktionswerte der betrachteten Originalfunktionen Null sind für den Bereich $t<0$.

5 Punkte ....

Quelle: Lothar Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 2, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 2001, 10. Auflage, ISBN 3-528-94237-1, Seiten 666 bis 669

4.2 Tabelle spezieller Laplace-Transformationen

Die nachfolgende Tabelle enthält einige in den Anwendungen besonders *häufig* auftretende Funktionenpaare. Eine umfassendere Transformationstabelle findet der Leser in der *Formelsammlung* sowie in der einschlägigen Spezialliteratur (s. Literaturverzeichnis).

Tabelle: Spezielle Laplace-Transformationen

Bildfunktion $F(s)$	Originalfunktion $f(t)$
(1) $\frac{1}{s}$	1 (Sprungfunktion)
(2) $\frac{1}{s-a}$	e^{at}
(3) $\frac{1}{s^2}$	t
(4) $\frac{1}{s(s-a)}$	$\frac{e^{at}-1}{a}$
(5) $\frac{1}{(s-a)^2}$	$t \cdot e^{at}$
(6) $\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$
(7) $\frac{s}{(s-a)^2}$	$(1+at) \cdot e^{at}$
(8) $\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{a \cdot e^{at} - b \cdot e^{bt}}{a-b}$
(9) $\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2} t^2$
(10) $\frac{1}{s^2(s-a)}$	$\frac{e^{at}-at-1}{a^2}$
(11) $\frac{1}{s(s-a)^2}$	$\frac{(at-1) \cdot e^{at}+1}{a^2}$

Tabelle (Fortsetzung)

(12) $\frac{1}{(s-a)^3}$	$\frac{1}{2} t^2 \cdot e^{at}$
(13) $\frac{s}{(s-a)^3}$	$\left(\frac{1}{2} at^2 + t\right) \cdot e^{at}$
(14) $\frac{s^2}{(s-a)^3}$	$\left(\frac{1}{2} a^2 t^2 + 2at + 1\right) \cdot e^{at}$
(15) $\frac{1}{s^n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
(16) $\frac{1}{(s-a)^n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{t^{n-1} \cdot e^{at}}{(n-1)!}$
(17) $\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin(at)}{a}$
(18) $\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
(19) $\frac{(\sin b) \cdot s + a \cdot \cos b}{s^2+a^2}$	$\sin(at+b)$
(20) $\frac{(\cos b) \cdot s - a \cdot \sin b}{s^2+a^2}$	$\cos(at+b)$
(21) $\frac{1}{(s-b)^2+a^2}$	$\frac{e^{bt} \cdot \sin(at)}{a}$
(22) $\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt} \cdot \cos(at)$
(23) $\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\sinh(at)}{a}$
(24) $\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$

Tabelle (Fortsetzung)

(25) $\frac{1}{(s-b)^2-a^2}$	$\frac{e^{bt} \cdot \sinh(at)}{a}$
(26) $\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	$e^{bt} \cdot \cosh(at)$
(27) $\frac{1}{s(s^2+4a^2)}$	$\frac{\sin^2(at)}{2a^2}$
(28) $\frac{s^2+2a^2}{s(s^2+4a^2)}$	$\cos^2(at)$
(29) $\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{t \cdot \sin(at)}{2a}$
(30) $\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t \cdot \cos(at)$
(31) $\frac{s}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{t \cdot \sinh(at)}{2a}$
(32) $\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$	$t \cdot \cosh(at)$
(33) $\arctan\left(\frac{a}{s}\right)$	$\frac{\sin(at)}{t}$

5 Anwendungen der Laplace-Transformation

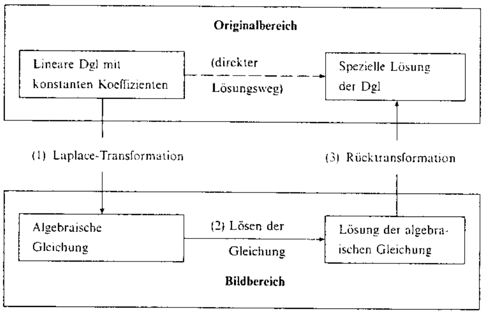
5.1 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

5.1.1 Allgemeines Lösungsverfahren mit Hilfe der Laplace-Transformation

Mit den in den Anwendungen besonders wichtigen *linearen* Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten haben wir uns bereits in Kapitel V ausführlich beschäftigt. Dort wurde gezeigt, wie man eine solche Differentialgleichung durch „*Variation der Konstanten*" oder durch „*Aufsuchen einer partikulären Lösung*" lösen kann.

Die *allgemeine* Lösung enthielt dabei noch *einen* bzw. *zwei* Integrationskonstanten als *Parameter*.

Ein weiteres (insbesondere in der Elektrotechnik und Regelungstechnik weit verbreitetes) Lösungsverfahren liefert die *Laplace-Transformation*. Wie wir im einzelnen noch sehen werden, gehen dabei in die *allgemeinen* Lösungen der Differentialgleichungen die jeweiligen *Anfangswerte* für $t = 0$ als *Parameter* ein. Die *Integration einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe der Laplace-Transformation liefert somit die allgemeine Lösung in Abhängigkeit von den Anfangswerten*[9]. Dieser in drei Schritten ablaufende Lösungsweg läßt sich wie folgt schematisch darstellen:



Wir beschreiben noch kurz die einzelnen Rechenschritte:

(1) Die *lineare* Differentialgleichung mit *konstanten* Koeffizienten und *vorgegebenen* Anfangswerten wird zunächst mit Hilfe der Laplace-Transformation in eine *algebraische Gleichung 1. Grades*, d.h. in eine *lineare* Gleichung übergeführt

(2) Als *Lösung* dieser Gleichung erhält man die Bildfunktion $Y(s)$ der gesuchten Lösung (Originalfunktion) $y(t)$.

(3) Durch *Rücktransformation* gewinnt man aus der Bildfunktion $Y(s)$ mit Hilfe einer *Transformationstabelle* (s. Abschnitt 4.2) und oder *spezieller* Methoden (wie z.B. der *Partialbruchzerlegung*) die *gesuchte Lösung* $y(t)$ der gestellten *Anfangswertaufgabe*.

[9] Wir lösen somit ein *Anfangswertproblem*