

Komplexe Fourier-Reihe

Herleitung aus der reellen Fourier-Reihe

$$\begin{aligned}
 \text{Reelle FR} \quad x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right) \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \frac{1}{2} (e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}) + b_k \cdot \frac{1}{2j} (e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}) \right) \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{A}_k}{2} \left(a_k + \frac{1}{j} b_k \right) e^{jk\omega_0 t} + \frac{1}{2} \left(a_k - \frac{1}{j} b_k \right) e^{-jk\omega_0 t} \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{A}_k \left(\frac{1}{2} (a_k - jb_k) e^{jk\omega_0 t} + \frac{1}{2} (a_k + jb_k) e^{-jk\omega_0 t} \right) \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{A}_k \left(\frac{1}{2} (a_k - jb_k) e^{jk\omega_0 t} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{A}_k \left(\frac{1}{2} (a_k + jb_k) e^{-jk\omega_0 t} \right) \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{A}_k \left(\frac{1}{2} (a_k - jb_k) e^{jk\omega_0 t} \right) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{A}_k \left(\frac{1}{2} (a_{-k} + jb_{-k}) e^{jk\omega_0 t} \right)
 \end{aligned}$$

Def.:

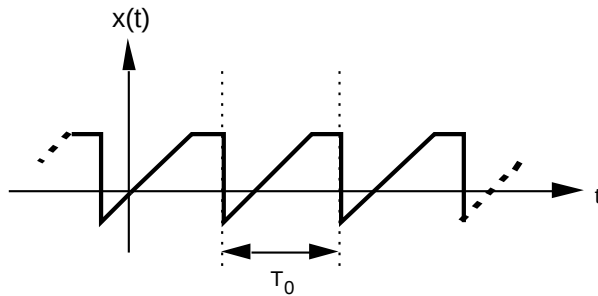
$$c_k := \begin{cases} \frac{a_0}{2} & (k=0) \\ \frac{1}{2} (a_k - jb_k) & (k>0) \\ \frac{1}{2} (a_{-k} + jb_{-k}) & (k<0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{jk\omega_0 t} \\
 &= c_0 e^{j0\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{jk\omega_0 t}
 \end{aligned}$$

$$\text{Komplexe FR} \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

Definition

Periodische Funktion bzw. periodisches Signal $x(t)$ mit Grundperiode T_0



Die Reihe in der Darstellung

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$$

ist die **komplexe Fourier-Reihe** von $x(t)$.

Die Konstanten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) sind die **komplexen Fourier-Koeffizienten**.

$x(t) =$	c_0	Konstanter Anteil
$+$	$c_1 e^{j\omega_0 t} + c_{-1} e^{-j\omega_0 t}$	1. Harmonische, Grundschiwingung
$+$	$c_2 e^{j2\omega_0 t} + c_{-2} e^{-j2\omega_0 t}$	2. Harmonische, 1. Oberschiwingung
$+$	$c_3 e^{j3\omega_0 t} + c_{-3} e^{-j3\omega_0 t}$	3. Harmonische, 2. Oberschiwingung
$+$	$\dots$	
$+$	$c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$	n. Harmonische, (n-1). Oberschiwingung
$+$	$\dots$	

Direkte Bestimmung der komplexen Fourier-Koeffizienten

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \left| \cdot e^{-jm\omega_0 t}, m \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left| \int_0^{T_0} \dots dt \right.$$

$$\int_0^{T_0} x(t) \cdot e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_0^{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jm\omega_0 t} dt$$

$$= \dots = c_m \cdot T_0 \quad \left| : T_0 \right.$$

$$\text{fi} \quad c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Da der Integrand die Periode T_0 besitzt, kann über ein beliebiges Intervall der Länge T_0 integriert werden:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$$