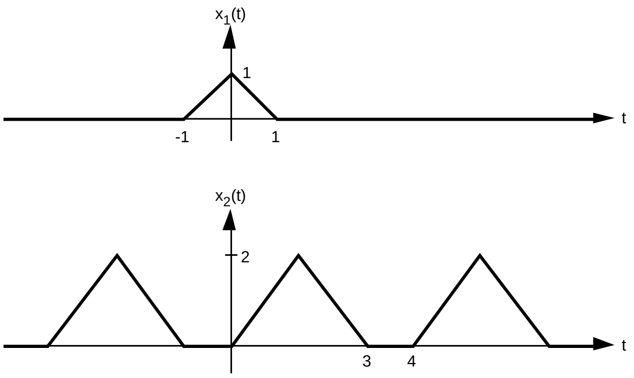
Repetitions-Aufgaben 2 Fourier-Transformation

Aufgaben

R2.1 Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktion $x_1(t)$ und der periodischen Funktion $x_2(t)$:

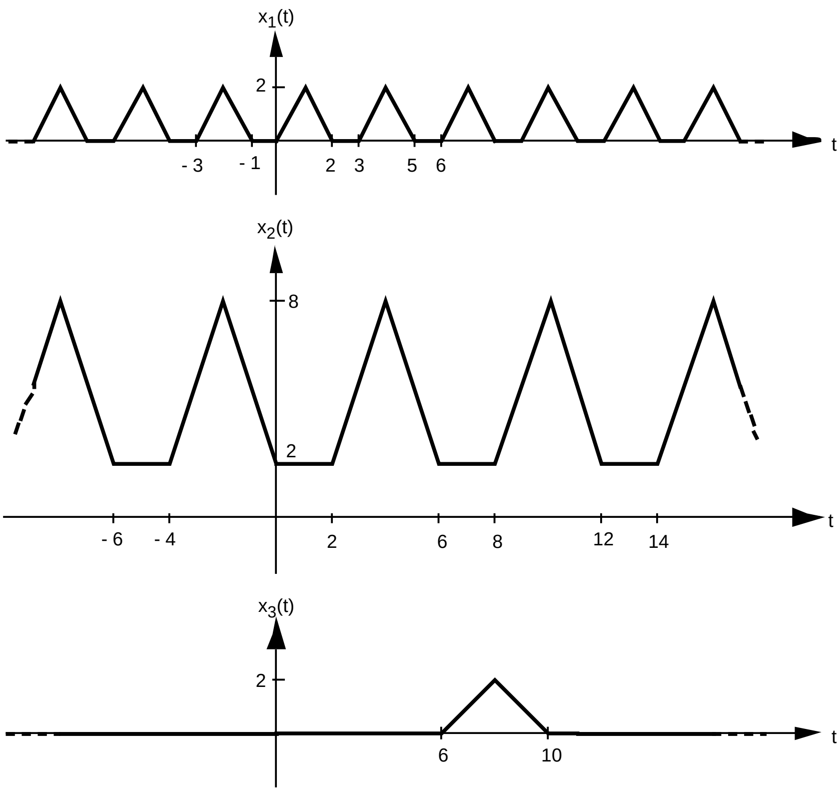


Die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ von $x_1(t)$ sei bekannt.

Drücken Sie die Fourier-Transformierte $X_2(\omega)$ von $x_2(t)$ durch die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ von $x_1(t)$ aus.

Geben Sie den Zusammenhang zwischen $X_2(\omega)$ und $X_1(\omega)$ in Form einer Formel $X_2(\omega) = ...$ an, mit welcher man $X_2(\omega)$ aus $X_1(\omega)$ bestimmen kann.

R2.2 Gegeben seien die Grafen der beiden periodischen Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ sowie der Graf der aperiodischen Funktion $x_3(t)$:



a) Es sei angenommen, dass man die Fourier-Transformierte $X_3(\omega)$ der Funktion $x_3(t)$ kennt.

Drücken Sie die Fourier-Koeffizienten c_{1k} $(k \;\; Z)$ der Funktion $x_1(t)$ durch die Fourier-Transformierte $X_3(\omega)$ der Funktion $x_3(t)$ aus.

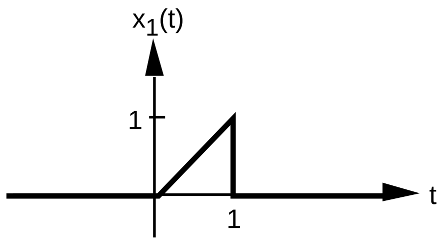
Geben Sie den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten c_{1k} $(k \;\; Z)$ und $X_3(\omega)$ in Form einer Formel c_{1k} = ... an, mit welcher man die Koeffizienten c_{1k} $(k \;\; Z)$ aus $X_3(\omega)$ bestimmen kann.

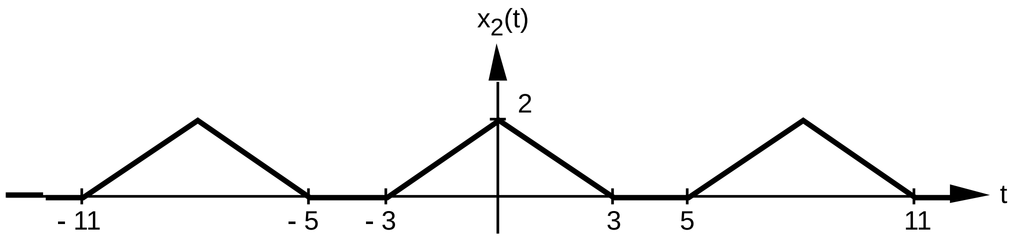
b) Es sei nun angenommen, dass man alle komplexen Fourier-Koeffizienten c_{1k} $(k \;\; Z)$ der Funktion $x_1(t)$ kennt.

Drücken Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_{2k} $(k \;\; Z)$ der Funktion $x_2(t)$ durch die komplexen Fourier-Koeffizienten c_{1k} $(k \;\; Z)$ der Funktion $x_1(t)$ aus.

Geben Sie den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der beiden Funktionen in Form einer Formel c_{2k} = ... an, mit welcher man die Koeffizienten c_{2k} $(k \;\; Z)$ aus den Koeffizienten c_{1k} $(k \;\; Z)$ bestimmen kann.

R2.3 Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktion $x_1(t)$ und der periodischen Funktion $x_2(t)$:





a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ der Funktion $x_1(t)$ von Hand.

Als Hilfsmittel sind nur eine Integrationstabelle erlaubt, jedoch keine Fourier-Transformations-Tabelle und kein Taschenrechner.

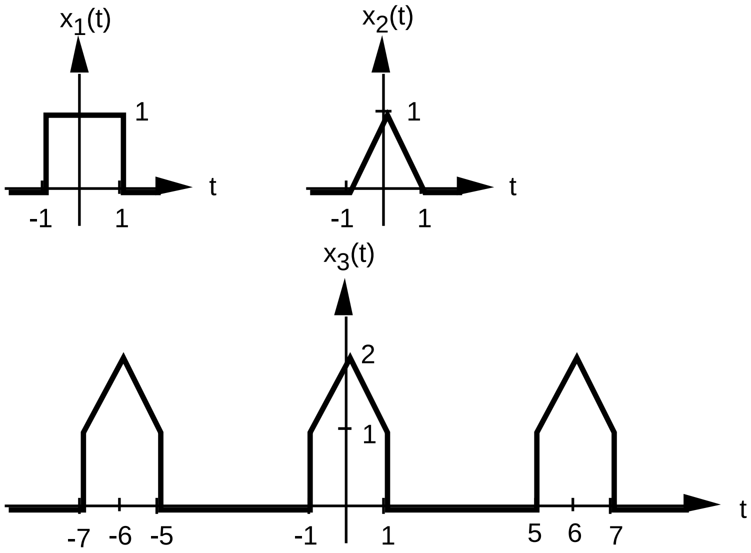
b) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k der Funktion $x_2(t)$ aus der Fourier-Transformierten $X_1(\omega)$ der Funktion $x_1(t)$.

Sie sollen also die Koeffizienten c_k weder von Grund auf berechnen noch eine Fourier-Reihen-Tabelle verwenden.

Benützen Sie jedoch die Kenntnis von $X_1(\omega)$ sowie die Eigenschaften der Fourier-Transformation.

Betrachten Sie $X_1(\omega)$ als bekannt, auch wenn Sie in der Ausgabe a) kein Resultat erhalten haben sollten. Der explizite Ausdruck für $X_1(\omega)$ ist unwesentlich, da Sie lediglich den Zusammenhang zwischen $X_1(\omega)$ und den Koeffizienten c_k aufzeigen sollen.

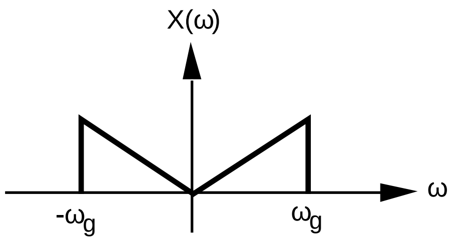
R2.4 Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktionen $x_1(t)$, $x_2(t)$ sowie der periodischen Funktion $x_3(t)$:



Drücken Sie die Fourier-Transformierte $X_3(\omega)$ der Funktion $x_3(t)$ durch die als bekannt vorausgesetzten Fourier-Transformierten $X_1(\omega)$ und $X_2(\omega)$ aus.
Sie sollen also nicht den konkreten Ausdruck für $X_3(\omega)$ berechnen, sondern den Zusammenhang zwischen $X_3(\omega)$ und den beiden bekannten Transformierten $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ angeben.

R2.5 Ein Modulator bildet das Produkt von zwei Zeitsignalen, dem Nachrichtensignal x(t) und dem Trägersignal s(t). Das Produkt $y(t) = x(t) \cdot s(t)$ ist das modulierte Signal.

Das Nachrichtensignal habe das folgende Spektrum:

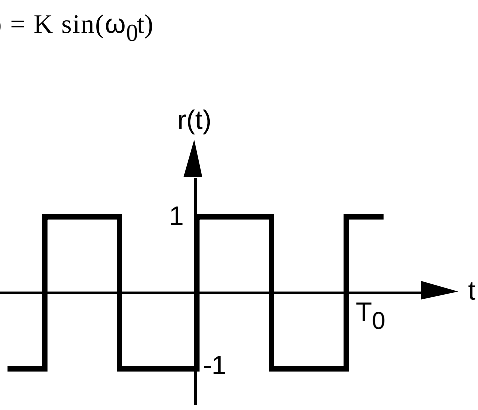


Skizzieren Sie das Fourierspektrum $Y(\omega)$ des modulierten Signals für die drei Fälle a), b) und c).

a) $s(t) = K \cos(\omega_0 t)$

b) $s(t) = K \sin(\omega_0 t)$

c) * r(t)



Annahme: Es gelte jeweils $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} >> \omega_g$

R2.6 * Gegeben sind die beiden Funktionen

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & (-1<T<1) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

$$x_2(t) = \cos(20\cdot t) + 2\cdot\cos(40\cdot t)$$

Nun wird das Produkt $x(t) := x_1(t)\cdot x_2(t)$ gebildet.

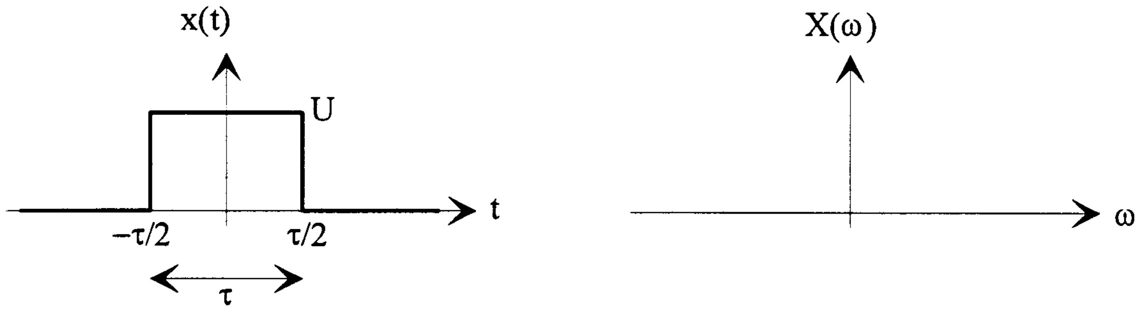
Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $X(\omega)$ von $x(t)$, und zeichnen Sie den Grafen von $X(\omega)$.

Aus Ihrer grafischen Darstellung von $X(\omega)$ sollte man die Funktionsgleichung von $X(\omega)$ herauslesen können.

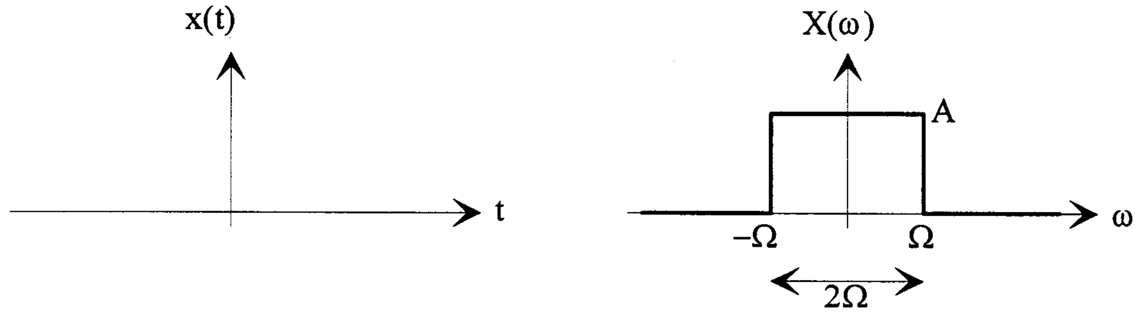
R2.7 Gegeben ist entweder das Zeitsignal $x(t)$ oder dessen Spektrum $X(\omega)$.

Bestimmen Sie das Spektrum $X(\omega)$ (bei gegebenem $x(t)$) bzw. das Zeitsignal $x(t)$ (bei gegebenem Spektrum $X(\omega)$), und skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf von $X(\omega)$ bzw. $x(t)$.

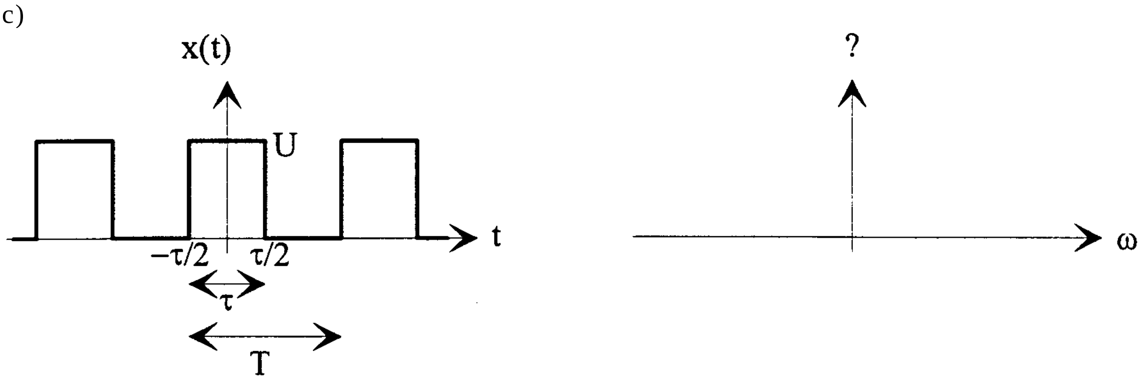
a)



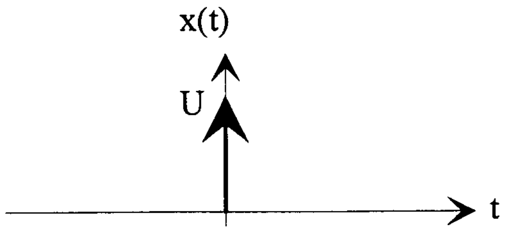
b)

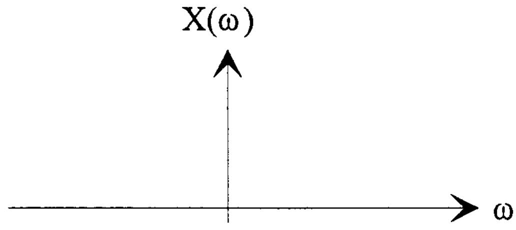


c)



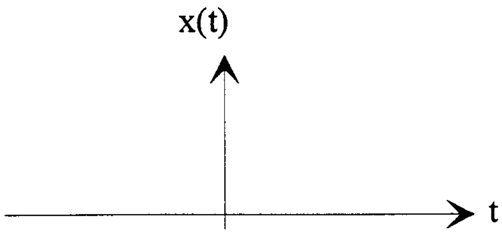
d)

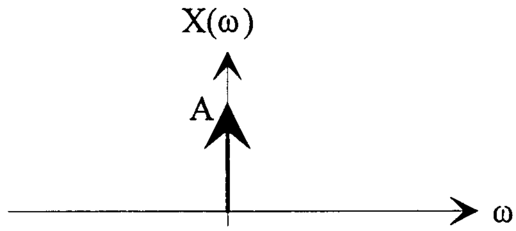




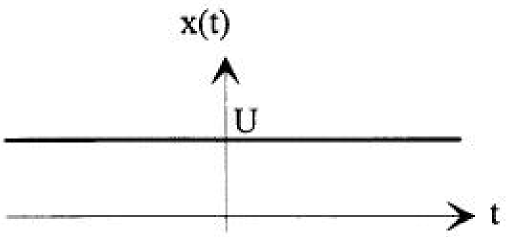
$$x(t) = U \cdot \delta(t)$$

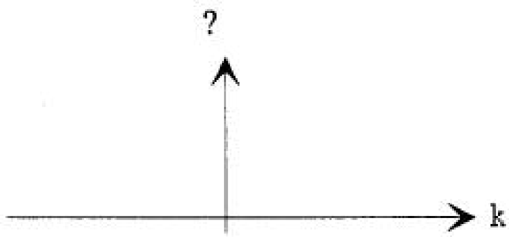
e)



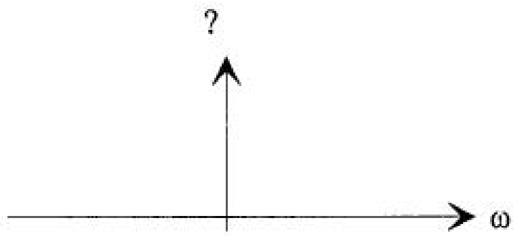


f)



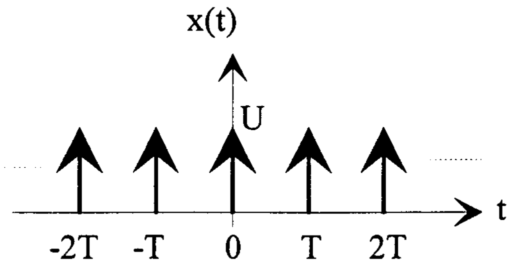


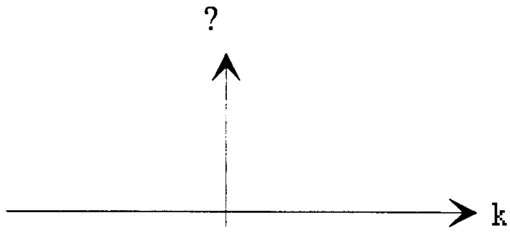
Darstellung als Fourierreihe



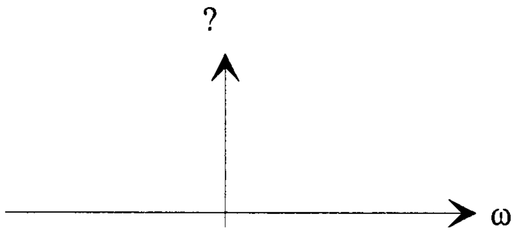
Darstellung als Fouriertransformierte

g)





Darstellung als Fourierreihe



Darstellung als Fouriertransformierte

Lösungen

R2.1 $$X_2(\omega) = \frac{3\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk(3\pi/4)} X_1\left(k\frac{3\pi}{4}\right) \delta\left(\omega - k\frac{\pi}{2}\right)$$

R2.2 a) $c_{1k} = \frac{1}{6} X_3\left(k\frac{\pi}{3}\right)$ b) $c_{2k} = \begin{cases} 3\,c_{10} + 2 & (k=0) \\ 3\,e^{-jk(2\pi/3)}\,c_{1k} & (k\neq 0) \end{cases}$

R2.3 a) $$X(\omega) = \begin{cases} -\frac{1}{\omega^2}\left(e^{-j\omega}(-j\omega - 1) + 1\right) & (\omega\neq 0) \\ \frac{1}{2} & (\omega=0) \end{cases}$$

b) $$c_k = \frac{3}{4}\left(e^{jk(3\pi/4)} X_1\left(k\frac{3\pi}{4}\right) + e^{-jk(3\pi/4)} X_1\left(-k\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

R2.4 $$X_3(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{3}\left(X_1\left(k\frac{\pi}{3}\right) + X_2\left(k\frac{\pi}{3}\right)\right)\delta\left(\omega - k\frac{\pi}{3}\right)$$

R2.5 a) $Y(\omega) = \frac{K}{2}\left(X(\omega+\omega_0) + X(\omega-\omega_0)\right)$ b) $Y(\omega) = j\,\frac{K}{2}\left(X(\omega+\omega_0) - X(\omega-\omega_0)\right)$

c) * ...

R2.6 * $X(\omega) = \text{sinc}(\omega+20) + \text{sinc}(\omega-20) + 2\,\text{sinc}(\omega+40) + 2\,\text{sinc}(\omega-40)$

R2.7 a) $$X(\omega) = \left.\begin{cases} U\tau\,\dfrac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} & (\omega\neq 0) \\ U\tau & (\omega=0) \end{cases}\right\} = U\tau\,\text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

b) $$x(t) = \left.\begin{cases} \dfrac{A\Omega}{\pi}\,\dfrac{\sin(\Omega t)}{\Omega t} & (t\neq 0) \\ \dfrac{A\Omega}{\pi} & (t=0) \end{cases}\right\} = \frac{A\Omega}{\pi}\,\text{sinc}(\Omega t)$$

c) $$X(\omega) = \frac{2\pi U\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right)\delta(\omega - k\omega_0) \qquad \omega_0 := \frac{2\pi}{T}$$

d) $X(\omega) = U$

e) $x(t) = \frac{A}{2\pi}$

f) Fourier-Reihe: $c_0 = U$, $c_k = 0$ $(k\neq 0)$
Fourier-Transformierte: $X(\omega) = 2\pi U\,\delta(\omega)$

g) Fourier-Reihe: $c_k = \frac{U}{T}$ $(k \in \mathbb{Z})$

Fourier-Transformierte: $$X(\omega) = \frac{2\pi U}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \qquad \omega_0 := \frac{2\pi}{T}$$